ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME VIII. AVRIL 1953. N° 32

Tome VIII Avril 1953 N° 32

ANNALES
DE
RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T. S. F.

COMPAGNIES FRANÇAISES

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL (CSF)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE (SFR)
RADIO-FRANCE (RF)
RADIO-ORIENT (RO)
COMPAGNIE RADIO-MARITIME (CRM)
COMPAGNIE RADIO-CINÉMA (CRC)
ÉTABLISSEMENTS E. ROBERT ET Cie (LA STÉATITE INDUSTRIELLE) (SI)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE-AFRIQUE (SFRA)
SOCIÉTÉ ANONYME LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE (LCC)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES MÉTAUX ÉLECTRONIQUES (CIME)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES CÉRAMIQUES ÉLECTRONIQUES (CICE)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Rédacteur scientifique : **M. Robert WARNECKE**

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F., Centre d'Information et de Documentation, 10, rue Carducci, Paris (19e).

In

pe
me
ne
d'i
la
co
tra
d'i
de
po
et
a
cr
de

m
ét
qu
re
ur
et
la
ré
à-
de

LA RECHERCHE EXPÉRIMENTALE DE L'ORDRE D'OSCILLATION ET DU FACTEUR DE RASSEMBLEMENT CINÉMATIQUE D'UN KLYSTRON REFLEX

PAR M. DE BENNETOT.

Département Électronique. Centre de Recherches Techniques de la Compagnie générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *Dans cet article, l'auteur étudie les moyens de déterminer expérimentalement deux des paramètres de fonctionnement du klystron reflex, « l'ordre d'oscillation » et le « facteur de rassemblement cinématique », quantités qui font intervenir la structure de l'espace réflecteur et les effets de la charge d'espace et donne les résultats des mesures effectuées sur un tube particulier.* (C. D. U. : 621.396.615.142.2)

SUMMARY. — *In this article, the author considers means for the experimental determination of two of the parameters in the operation of the reflex klystron « the mode of oscillation » and « the bunching effectiveness factor »; these quantities take into account the structure of the repeller space and the effect of space charge; the author gives the results of measurements on a particular tube.* (U. D. C. : 621.396.615.142.2)

Introduction.

Cet article contient une étude des méthodes qui permettent de déduire de quelques mesures expérimentales la valeur de deux paramètres de fonctionnement d'un klystron reflex : l'*ordre d'oscillation*, d'une part, qui est lié à une relation de phase entre la tension de haute fréquence de la cavité et le courant électronique, modulé en densité, qui la traverse; le *facteur de rassemblement cinématique*, d'autre part, généralement noté F, facteur correctif de comparaison entre le champ réflecteur constant postulé dans le cas « idéal » de la théorie approchée et le champ réflecteur réel, non constant, que l'on a en pratique pour deux raisons : la charge d'espace créée par le faisceau électronique et la courbure de l'électrode réflectrice.

C'est en effet par la recherche de ces deux paramètres qu'il semble normal de commencer une étude du fonctionnement du klystron reflex. Tandis que l'un, l'ordre d'oscillation, exprime que la différence de phase entre tension et courant peut prendre une série de valeurs qui diffèrent entre elles de $K.2\pi$, et qui correspondent aux divers modes d'oscillations, l'autre analyse le fonctionnement du champ réflecteur en tant qu'organe de rassemblement, c'est-à-dire organe de transformation de la modulation de vitesse en modulation de densité.

Pour déterminer l'ordre d'oscillation, on peut utiliser une loi de similitude de l'optique électronique qui tient compte de la charge d'espace. Ce procédé a été décrit, il y a déjà plusieurs années [1]. De la même loi, on déduit également deux relations qui montrent comment varie la phase du courant modulé lorsque l'on modifie légèrement, soit la tension d'accélération, soit la tension du réflecteur. En rapprochant ces deux relations on peut obtenir le facteur F.

Ces relations font seulement intervenir la tension du réflecteur V_R, la tension d'accélération V_0 et la variation de l'une en fonction de l'autre, $\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|$, pour un ordre donné, au voisinage du point de fonctionnement. La détermination de F ne demande donc, en fait, qu'une seule mesure expérimentale, celle de $\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|$ et, à une fréquence donnée de la cavité, on peut tracer la courbe de variation des diverses valeurs que prend F en fonction de la tension du réflecteur (*fig.* 8). Ce diagramme se conserve d'ailleurs à peu de choses près dans la bande d'accord de la cavité (*fig.* 10).

L'examen des résultats numériques montre le rôle déterminant que joue la charge d'espace sur le rassemblement électronique, dans le klystron reflex, surtout sur les ordres elévés. C'est d'ailleurs

ce que laissaient prévoir les théories approchées du groupement cinématique qui tiennent compte de la charge d'espace [2], [3], [4], [5], [6], et ce qu'avaient confirmé des évaluations indirectes de F, tirées de la confrontation dans le cadre de la théorie approchée d'une série de mesures expérimentales [2].

Ces résultats peuvent être interprétés de la façon suivante : dans le réflecteur réel à charge d'espace, lorsque le klystron oscille sur l'ordre N, on peut considérer que tout se passe, pour le rassemblement cinématique comme dans un klystron à champ réflecteur constant à condition de prendre pour valeur de l'ordre : FN. FN, que l'on peut appeler par opposition « l'ordre de rassemblement », varie de façon considérable d'une extrémité à l'autre de l'ordre d'oscillation N (*fig.* 11). Le champ réflecteur se conduit ainsi, en fonction de la charge d'espace variable qui y est créée par le faisceau électronique sur les différents ordres, comme un transformateur à rapport variable.

Les résultats numériques mettent aussi en évidence le rôle important que joue l'espace de glissement « parasite » que contient tout klystron reflex et qui est constitué au minimum par la demi-longueur du champ H. F. et surtout par l'épaisseur de la grille, du côté du réflecteur, lorsqu'elle existe.

La « démodulation » du faisceau qui s'y produit abaisse la valeur de F qui apparaît comme la résultante de deux actions inverses (*fig.* 9) : la charge d'espace qui l'accroît, l'espace de glissement qui la réduit. Sur les ordres élevés c'est la charge d'espace qui l'emporte et F est supérieur à l'unité. Sur les ordres bas, la charge d'espace est plus faible, l'espace de glissement plus important en valeur relative, F peut être inférieur à l'unité.

Enfin, l'effet de la courbure de l'électrode réflectrice [7] s'ajoute aux deux précédents et rend le champ non uniforme, même en l'absence de charge d'espace.

En ce qui concerne la détermination de l'ordre d'oscillation on pourra s'adresser, au choix, soit aux procédés déjà connus discutés au paragraphe 2, où leurs formules sont indiquées, soit au procédé décrit à leur suite et qui utilise la mesure déjà employée pour F, celle de $\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|$.

Ils sont de valeur à peu près équivalente et, en général, l'identification de l'ordre d'oscillation ne présentera pas de difficulté particulière.

1. Loi de similitude de l'optique électronique.

Lorsque l'on multiplie par un même facteur les tensions d'un tube, les trajectoires sont conservées et les temps de transit varient comme $[V]^{-\frac{1}{2}}$.

Appliquons cette loi à la phase de l'électron non modulé ou électron « central » du paquet. On supposera que cette phase se confond pratiquement avec celle du courant électronique, modulé en densité. Elles peuvent en réalité différer légèrement mais comme on utilisera des points de fonctionnement où la tension H. F. conserve à peu près sa valeur, cette différence de phase sera constante et n'interviendra pas dans la différentiation.

On écrit, pour l'électron non modulé, de phase θ, que l'on peut exprimer sa variation de phase $d\theta$ en fonction de l'une seulement des tensions qui varient dans un rapport constant.

On a, par exemple, en choisissant la tension d'accélération V_0,

$$\left[\mathrm{d}\theta = -\frac{\theta}{2V_0}\,\mathrm{d}V_0\right]_{\frac{V_0}{W_0}=\text{const.},\ \frac{V_R}{V_0}=\text{const.}} \tag{1}$$

Dans un klystron reflex, trois tensions varient : la tension du réflecteur V_R, la tension d'accélération V_0, la tension du wehnelt W_0.

Écrivons la différentielle totale

$$\mathrm{d}\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_0}\right)\mathrm{d}V_0 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right)\mathrm{d}V_R + \left(\frac{\partial\theta}{\partial W_0}\right)\mathrm{d}W_0.$$

On peut négliger l'action du wehnelt, très faible en général. Il est d'ailleurs possible de conserver le terme correspondant sans difficulté.

Il vient, lorsque $\frac{V_R}{V_0} = \text{const.}$:

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{\theta}{2V_0}\,\mathrm{d}V_0 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_0}\right)\partial V_0 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_0}\right)\left(\frac{\partial V_0}{\partial V_R}\right)\frac{V_R}{V_0}\,\mathrm{d}V_0.$$

D'où

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}V_0}\right) = -\frac{\theta}{2V_0}\,\frac{1}{1+\frac{V_R}{V_0}\left|\frac{\partial V_0}{\partial V_R}\right|_{\theta=\text{const.}}} \tag{2}$$

et

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right) = -\frac{\theta}{2V_0}\,\frac{1}{\frac{V_R}{V_0}+\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|_{\theta=\text{const.}}}. \tag{3}$$

Dans ces relations, pour éviter toute ambiguïté de signe, on a pris V_R positif et $\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|$ en valeur absolue. L'écriture indiquée correspond au cas usuel où les courbes $\theta = \text{const.}$, dans le diagramme (V_R, V_0) sont à pente négative.

Si l'on se reporte au diagramme (V_R, V_0), l'interprétation du calcul précédent est la suivante : Soit un ordre θ, un point de fonctionnement en A. Si l'on se déplace, à $\frac{V_R}{V_0} = \text{const.}$, de A en B, θ varie de $\mathrm{d}\theta$ et l'on peut exprimer ce $\mathrm{d}\theta$ en fonction de $\mathrm{d}V_0 = \mathrm{AE}$ [relation (1)].

Cette variation $d\theta$ peut aussi être obtenue par une variation de tension d'accélération V_0, à $V_R = $ const. (chemin AC) ou par une variation de tension du réflecteur V_R, à $V_0 = $ const. (chemin AD).

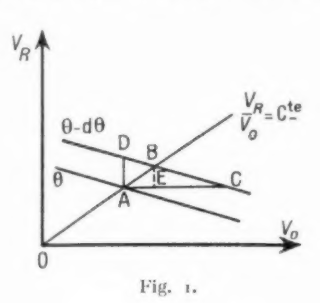


Fig. 1.

On notera que les formules que l'on obtient dans le cas particulier du champ réflecteur uniforme vérifient les relations (2) et (3)

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_0}\right)_{\text{ch const.}} = -\frac{\theta}{2V_0}\,\frac{V_0 - V_R}{V_0 + V_R},$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right)_{\text{ch const.}} = -\frac{\theta}{2V_0}\,\frac{2V_0}{V_0 + V_R},$$

$$\left(\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right)_{\text{ch const.}} = \frac{V_0 - V_R}{2V_0}.$$

On peut tirer des formules analogues aux précédentes, de l'examen d'un diagramme (V_R, f), tension réflecteur-fréquence (*fig.* 2).

Comme précédemment, on peut passer de θ à $\theta + d\theta$, soit par une variation de la fréquence de la cavité, à $V_R = $ const. (chemin AB), soit par une variation de la tension du réflecteur, à fréquence fixe de la cavité (chemin AC).

Sur le chemin AB, $V_0 = $ const., $V_R = $ const.; le

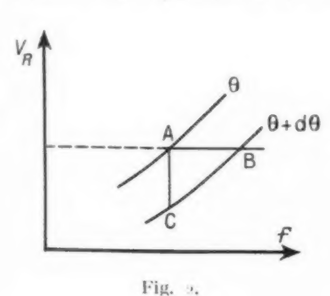


Fig. 2.

temps de transit de l'électron central est constant à cela près que la largeur de la fente H. F. varie très légèrement. Mais il ne s'agit que de la variation d'une fraction — la demi-distance inter-grilles — d'un élément déjà mineur — l'espace de glissement — de la distance totale que parcourt l'électron. Donc, à très peu près :

$$[\tau]_A^B = \text{const.}$$

En différentiant l'expression de l'angle de transit :

$$\theta = 2\pi f \tau,$$

il vient

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial f}\right) = \frac{\theta}{f}$$

et

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right) = -\frac{\theta}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial V_R}\right|_{\theta=\text{const.}}$$

avec les mêmes conventions que précédemment.

En se rappelant que l'on a, d'après l'expression de la différentielle totale

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_0}\right) = -\frac{\theta}{2V_0} - \frac{V_R}{V_0}\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right),$$

on trouve

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_0}\right) = -\frac{\theta}{2V_0} + \frac{V_R}{V_0}\,\frac{\theta}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial V_R}\right|_{\theta=\text{const.}}.$$

2. Détermination de l'ordre d'oscillation.

1° Sur le diagramme (V_R, f), on a représenté deux ordres (*fig.* 3) : ils ont entre eux une différence de phase de 2π.

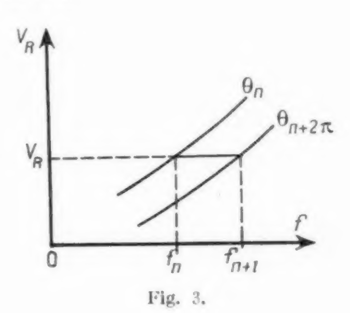


Fig. 3.

Posons

$$\theta = 2\pi N,$$

pour mettre en évidence dans θ, le nombre de rotations complètes.

Il est inutile de supposer *a priori* que N appartient à la suite $(n + 0{,}75)$, avec n entier. N est, pour le moment, quelconque.

On a, en admettant, sous la réserve déjà faite, que le temps de transit τ est constant pour $V_0 = $ const.; $V_R = $ const., malgré la faible variation de la distance inter-grilles

$$\theta_n = 2\pi N = 2\pi f_n \tau,$$

$$\theta_n + 2\pi = 2\pi(N+1) = 2\pi f_{n+1}\tau,$$

il vient, par division membre à membre :

$$\frac{N}{N+1} = \frac{f_n}{f_{n+1}} \tag{6}$$

ou encore

$$N = \frac{f_n}{f_{n+1} - f_n}. \tag{7}$$

2° Sur le diagramme (V_R, V_0), on a également figuré deux ordres (*fig.* 4). D'après la loi de similitude, lorsque l'on maintient les tensions dans un

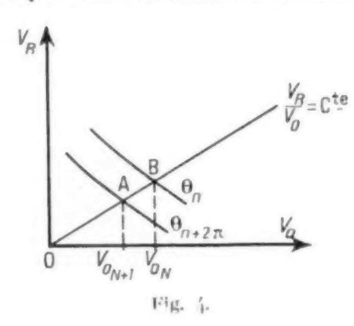


Fig. 4.

rapport constant, les temps de transit varient comme $[V]^{-\frac{1}{2}}$. Sur la droite AB, à fréquence fixe, on a donc

$$\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{\theta_n}{\theta_n + 2\pi} = \left[\frac{V_{0_N}}{V_{0_{N+1}}}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

en écrivant, comme précédemment

$$\theta = 2\pi N.$$

Il vient

$$\frac{N}{N+1} = \left[\frac{V_{0_N}}{V_{0_{N+1}}}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{8}$$

et

$$N = \frac{1}{\left[\frac{V_{0_N}}{V_{0_{N+1}}}\right]^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{1}{1 - \left[\frac{V_{0_N}}{V_{0_{N-1}}}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{9}$$

Lorsque l'on rapproche les formules (6) et (8), on voit que les deux procédés conduisent à écrire

$$\frac{N}{N+1} = \frac{f_n}{f_{n+1}} = \left[\frac{V_{0_{N+1}}}{V_{0_N}}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du rapport $\frac{N}{N+1}$ pour les ordres usuels.

n.	$\frac{N}{N+1}$.	n.	$\frac{N}{N+1}$.
1..........	0,636	5..........	0,852
2..........	0,733	6..........	0,871
3..........	0,789	7..........	0,886
4..........	0,826	8..........	0,897

Lorsque n croît, les valeurs de $\frac{N}{N+1}$ sur les ordres successifs deviennent très proches. Si l'on dispose d'ordres bas, le choix de n est assez facile. Au contraire, sur les ordres élevés, une faible imprécision expérimentale peut entraîner une erreur ou une incertitude [de même l'approximation introduite dans l'étude de (V_R, f)].

Cette difficulté peut être levée en utilisant la relation (3). Soit une fréquence donnée de la cavité, où l'on peut observer plusieurs ordres N, $N+1$, ..., pour des tensions du réflecteur V_{R_N}, $V_{R_{N+1}}$, ... Sachant que d'un ordre au suivant la phase varie de 2π à 360°, on en déduit la valeur moyenne entre deux ordres de $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right)$; en degrés par volt, par exemple :

$$\left[\text{val. moy. de}\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right)\right] = \frac{360}{V_{R_{N+1}} - V_{R_N}}. \tag{11}$$

D'autre part, de la relation (3), on tire en exprimant la phase en degrés par volt, également

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right) = -\frac{180}{V_0}\,\frac{1}{\frac{V_R}{V_0} - \left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|_{\theta=\text{const.}}}\,N. \tag{12}$$

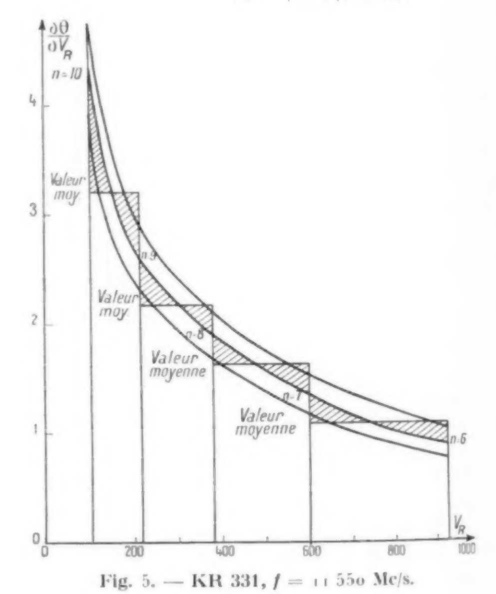


Fig. 5. — KR 331, f = 11 550 Mc/s.

La valeur de N correcte, sur chaque ordre, est celle qui correspond à la courbe $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_R}\right)$ qui admet pour valeur moyenne entre deux ordres les valeurs déduites de (11).

Sur la figure 5, on a tracé ces courbes pour un

klystron reflex KR 331, à $f = 11\,550$ Mc/s, en supposant successivement $n = 5$, 6 et 7 pour $V_R = 930$ V.

La comparaison des valeurs moyennes conduit à adopter $n = 6$ (égalité des aires hachurées).

Ce tracé est répété pour le même tube à $f = 8\,400$ Mc/s sur la figure 5 *bis*.

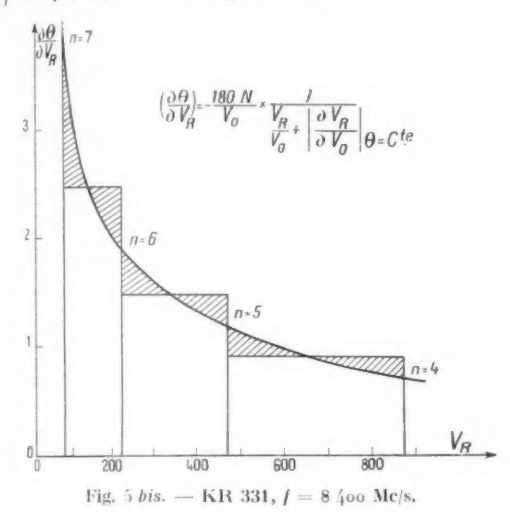


Fig. 5 *bis*. — KR 331, $f = 8\,400$ Mc/s.

Il est clair qu'une précision moyenne des mesures suffit et qu'il n'y a pas ambigüité dans le choix de n. Le procédé conserve son efficacité pour les ordres

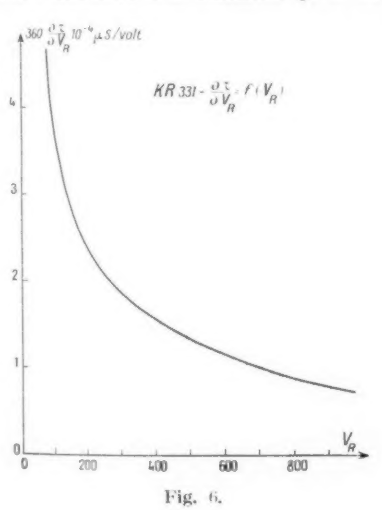


Fig. 6.

élevés. Il est surtout utile lorsque, pour des raisons diverses, on ne peut faire varier V_0 qu'entre des limites étroites, ce qui ne permet pas d'utiliser le diagramme (V_R, V_0).

Si l'on divise $\left(\frac{\partial \theta}{\partial V_R}\right)$ par la fréquence d'oscillation, on obtient (au coefficient 2π près), la dérivée partielle $\left(\frac{\partial \tau}{\partial V_R}\right)$ du temps de transit en fonction de la tension du réflecteur qui est indépendante de la distance inter-grilles et se conserve donc dans toute la bande d'accord de la cavité.

On peut sur la courbe $\left(\frac{\partial \tau}{\partial V_R}\right)$ répéter le raisonnement qui a permis de déterminer N [on divise par f les deux membres des relations (11) et (12)] et vérifier que, quelle que soit la fréquence utilisée, on trouve la même courbe et que cette courbe admet bien pour valeur moyenne celle déduite de la différence des tensions du réflecteur (*fig.* 6). Ainsi se trouve confirmée la validité du procédé de recherche expérimentale.

3. Détermination du facteur de rassemblement cinématique.

Revenons aux relations (2) et (3). Elles expriment comment varie la phase du courant modulé lorsque l'on modifie légèrement, soit la tension d'accélération, soit la tension du réflecteur.

Les deux dérivées partielles $\left(\frac{\partial \theta}{\partial V_0}\right)$ et $\left(\frac{\partial \theta}{\partial V_R}\right)$ n'ont pas la même valeur. En effet, tandis que V_R n'agit que sur le champ réflecteur, V_0 agit sur ce champ et sur la vitesse initiale de l'électron. Mais en ce qui concerne seulement l'action sur le champ, il y a symétrie complète : V_R et V_0 jouent le même rôle.

On peut utiliser cette remarque pour calculer la variation de phase que subit un électron de vitesse initiale v_e pour une variation élémentaire de vitesse dv_e.

Pour se ramener à une relation où n'interviennent que des tensions, on associe à la vitesse v_e, la tension V_e définie par

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = e V_e,$$

ce qui fait correspondre à la variation de vitesse dv_e, la variation de tension dV_e et l'on peut dire que si l'on change de dV volts la tension V_0 d'un électron, on obtient une variation de sa phase $d\theta$ que l'on peut obtenir également si l'on change de dV volts la tension V_e et de dV volts aussi la tension du réflecteur V_R. Ceci s'écrit

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial V_0}\right) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial V_e}\right) + \left(\frac{\partial \theta}{\partial V_R}\right), \tag{13}$$

où $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)$ représente la variation de phase de l'électron que le transit dans le champ réflecteur fait correspondre à une variation de tension dV_e, c'est-à-dire ce que l'on peut appeler le « rapport de transformation » du champ réflecteur
D'où, d'après (13)

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)=\frac{\theta}{2V_0}\,\frac{1-\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|}{\frac{V_R}{V_0}+\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|}$$

ou d'après (4)

$$(15)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)=\frac{\theta}{2V_0}\left[2\,\frac{V_0+V_R}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial V_R}\right|-1\right].$$

Dans ces expressions, on a considéré implicitement la fente d'interaction haute fréquence comme infiniment étroite. C'est-à-dire que pour une fente de largeur $2d$, il faut réduire la tension par le coefficient β, qui vaut

$$\beta=\frac{\sin d'}{d'},\qquad \text{avec}\quad d'=\frac{\omega d}{v_0}.$$

et prendre comme variation de phase

$$\beta V_{\text{H.F.}}\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right).$$

On déduit donc de la variation de phase de l'électron central avec V_R et V_0, quelle est la variation de phase que subit un électron d'énergie initiale eV_0 sur lequel agit une tension élémentaire dV_e. Le rapport $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)$ que l'on détermine ainsi n'est qu'une valeur moyenne. En toute rigueur $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)$ est différent sur chaque trajectoire d'électron et varie avec l'amplitude de la tension de haute fréquence.

Connaissant le « rapport de transformation » d'un champ réel, on en déduit d'une façon très générale un facteur correctif qui permet d'introduire les champs non constants dans l'écriture des formules de la théorie approchée. En effet, dans la théorie approchée, on a supposé d'abord, — pour ne pas compliquer inutilement les équations et pour dégager clairement le sens physique du groupement cinématique qui s'opère dans le champ réflecteur —, que ce champ réflecteur était constant.

Le temps de transit d'un électron d'énergie initiale eV_0 est dans ces conditions :

$$\tau=2\,\frac{m}{e}\,d\,v_e\,\frac{1}{V_0+V_R},$$

où d désigne la profondeur du champ réflecteur et où l'on a posé

$$\frac{1}{2}\,mv_e^2=eV_e=eV_0.$$

La variation de phase de l'électron avec la tension V_e est

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. const.}}=\frac{\theta}{2V_0}.$$

Pour utiliser correctement les formules de la théorie approchée lorsque le champ réflecteur n'a pas cette forme idéale, c'est-à-dire n'est pas constant, il faut substituer à ce « rapport de transformation » $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. const.}}$, le « rapport de transformation » du champ réflecteur réel $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. réel}}$, celui que l'on a cherché à déterminer par la relation (14).

D'où l'introduction du facteur correctif F, dit

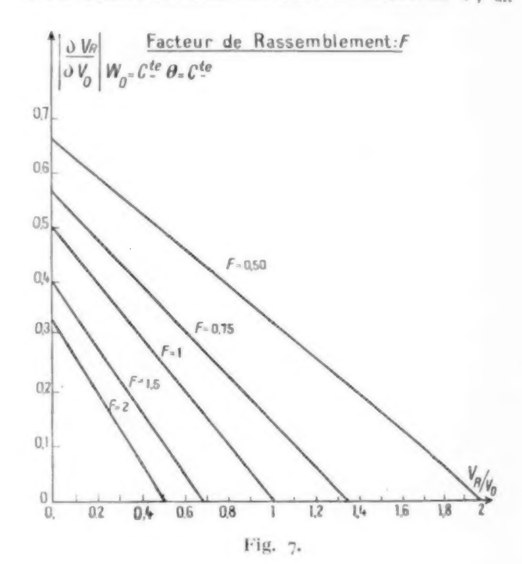


Fig. 7.

« facteur de rassemblement cinématique » et qui vaut

$$(17)\qquad F=\frac{\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. réel}}}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. const.}}}.$$

En admettant la valeur de $\left(\frac{\partial\theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. réel}}$, que fournit l'équation (14) on trouve

$$(18)\qquad F=\frac{1-\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|}{\frac{V_R}{V_0}+\left|\frac{\partial V_R}{\partial V_0}\right|}.$$

et d'après (15),

$$(19)\qquad F=2\,\frac{V_0+V_R}{f}\left|\frac{\partial f}{\partial V_R}\right|-1.$$

L'équation (19) ne donne qu'une valeur approchée de F, par défaut, en raison de l'hypothèse discutée

au paragraphe 1 qui a été admise pour l'interprétation du diagramme (V_R, f).

La valeur du degré de rassemblement δ s'en déduit :

$$\delta = \beta V_{\text{H.F.}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. réel}} = \beta V_{\text{H.F.}} \frac{F\theta}{2 V_0},$$

puisque d'après la remarque déjà faite β réduit la tension H. F.

La valeur de F sur les différents ordres obser-

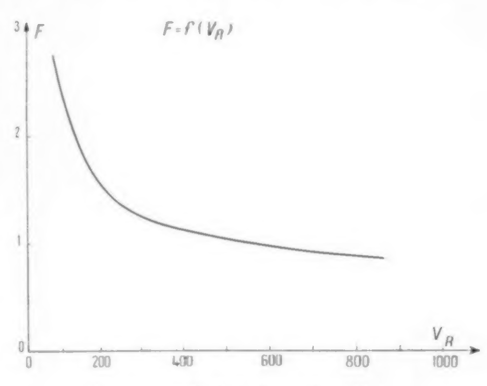


Fig. 8. — KR 331, $f = 8\,400$ Mc/s.

vables a été portée sur la figure 8 en fonction de la tension réflecteur, dans le cas d'un klystron reflex KR 331, oscillant sur $f = 8\,400$ Mc/s. On voit que F est voisin de 0,8 pour les ordres bas et s'éloigne ensuite assez rapidement de cette valeur pour atteindre 3.

Il reste encore à faire la part, comme il a été dit dans l'introduction, de ce qui dans ce facteur F global revient à l'effet proprement dit de la charge d'espace et de la courbure de l'électrode réflectrice et de ce qui est dû à l'action « démodulatrice » de l'espace « parasite » de glissement.

On sera ainsi amené à introduire le facteur F_R (facteur de rassemblement dans le champ réflecteur proprement dit) qui représente uniquement ce qui se passe dans le champ de freinage. C'est ce facteur F_R que cherchent à déterminer les théories approchées du groupement cinématique qui tiennent compte de la charge d'espace et qui ont été signalées sous les références [2], [3], [4], [5], [6].

On a, en désignant par θ_1 l'angle de transit dans l'espace de glissement et θ_2 l'angle de transit dans l'espace de freinage,

$$\theta = \theta_1 + \theta_2,$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial V_e}\right) = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial V_e}\right) + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial V_e}\right).$$

Dans l'espace de glissement

$$\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial V_e}\right) = - \frac{\theta_1}{2 V_0}.$$

En posant, pour le champ de freinage

$$F_R = \frac{\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. réel}}}{\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. const.}}} = \frac{2 V_0}{\theta_2} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial V_e}\right)_{\text{ch. réel}},$$

il vient

$$F = \frac{\theta_2}{\theta} F_R - \frac{\theta_1}{\theta} \tag{20}$$

ou encore

$$F = F_R - \frac{\theta_1}{\theta} (F_R + 1). \tag{21}$$

La figure 9 représente F en fonction de F_R et $\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{\tau_1}{\tau}$.

De la formule (21) on déduit une valeur limite de F dont on se rapprochera sur les ordres bas. On a, en écrivant que F_R qui est toujours supérieur à l'unité, est alors voisin de 1 :

$$\text{Valeur limite de } F = 1 - 2\frac{\theta_1}{\theta}.$$

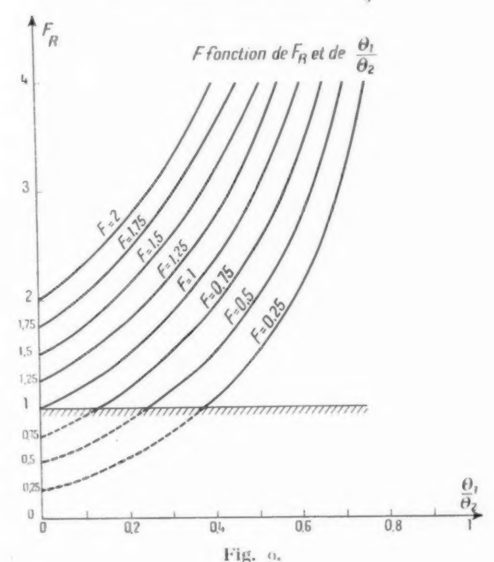


Fig. 9.

On en déduit également que dans un klystron où l'on accorde la fréquence de la cavité par modification de la longueur du champ H. F., F décroîtra très légèrement avec la fréquence pour $V_R = \text{const.}$

En effet, avec $V_0 = \text{const.}$, $V_R = \text{const.}$, les trajectoires sont inchangées dans le réflecteur, F_R est constant tandis que

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}$$

croît lorsque τ_1 croît ($\tau_2 = \text{const.}$).

C'est ce qui apparaît sur la figure 10 où l'on a porté F en fonction de la tension du réflecteur V_R

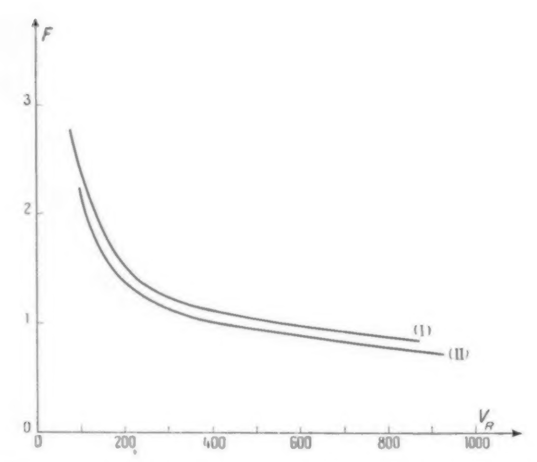


Fig. 10. — KR 331 : I. f = 8 400 Mc/s; II. f = 11 550 Mc/s.

pour deux fréquences éloignées de la bande d'accord de la cavité. Il ne s'agit cependant que d'un écart faible; sur la figure 11, enfin, on a tracé la valeur que prend FN sur les différents ordres en fonction de la fréquence de la cavité. FN représente comme il a été dit « l'ordre de rassemblement » qui, à chaque tension du réflecteur, se substitue, en ce qui concerne le groupement des électrons, à l'ordre d'oscillation N. Il faut remarquer que ceci ne sépare pas l'action de l'espace de glissement de celle de la charge d'espace.

Conclusion.

On voit que les propriétés de rassembleur cinématique du champ de freinage varient de façon très sensible avec la valeur de la tension du réflecteur et que pour donner une interprétation exacte du fonctionnement du klystron reflex, il faut joindre la détermination de F à celle de l'ordre d'oscillation.

C'est, à la fois, la courbure de l'électrode réflectrice, la charge d'espace créée par le faisceau électronique dans le champ réflecteur et la longueur de l'espace de glissement qui déterminent F. La difficulté qu'il y a, à donner une analyse théorique valable de cet ensemble justifie l'emploi d'une mesure expérimentale de F qui peut être utilisée d'ailleurs à la fois pour la mise au point des tubes et pour la recherche de la solution théorique.

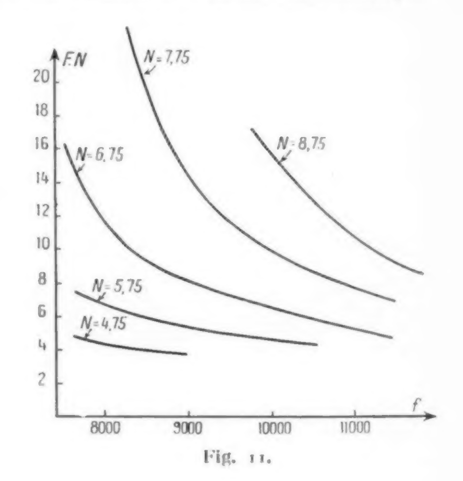


Fig. 11.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] D. R. Hamilton, J. K. Knipp et J. B. H. Kuper, *Klystrons and Microwave Triodes*, Mac Graw Hill, New-York, 1948, chapitre XIII, par D. R. Hamilton.

[2] M. Chodorow et V. B. Westburg, *Space-Charge Effects in Reflex Klystrons*, Communication présentée à l'I. R. E. National Convention, New-York, mars 1950, publiée dans *Proceedings of the I. R. E.*, décembre 1951, p. 1548.

[3] V. B. Westburg, *The Electronic Admittance of the Reflex Klystron in the Presence of Space-Charge* (*Thèse de Doctoral*, à l'Université de Stanford, décembre 1949).

[4] W. Sollfrey, *Space-Charge Effects in Reflex Klystrons*, Sperry Gyroscope Co, Great Neck L.I., New-York, Rapport n° 52.21-1084, juin 1947.

[5] J. R. Pierce et W. Shepherd, *Reflex Oscillators* (*Bell Syst. Tech. J.*, juillet 1947, p. 460).

[6] R. Warnecke et P. Guénard, *Les tubes électroniques à commande par modulation de vitesse*, chap. XXIV.

[7] L. T. Zitelli, *Repeller Field Shape as a Factor in the Design of Broadband Reflex Klystron Oscillators*, Contract n° 6, onr 251, Consolidated Task 7, Rapport technique n° 3, 25 mai 1948.

CALCUL PRATIQUE DES ABERRATIONS DU TROISIÈME ORDRE DANS LES SYSTÈMES CENTRÉS DE L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE

PAR MARCEL BARBIER,

Département Électronique. Centre de Recherches Techniques de la Compagnie générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *La méthode pratique de calcul des trajectoires, qui consiste à diviser l'espace en intervalles successifs où le potentiel est approché par des distributions pour lesquelles les trajectoires sont connues, est étendue au calcul des aberrations du troisième ordre. Il se révèle possible d'intégrer complètement dans ces conditions les expressions donnant ces aberrations. Les formules à utiliser dans la pratique sont développées. Les résultats obtenus par cette méthode d'approximation sont en excellent accord avec les résultats obtenus par la méthode directe dans tous les cas connus. Comme application, toutes les aberrations du troisième ordre d'une lentille magnétique et d'une lentille électrostatique sont calculées en fonction de la puissance de la lentille.*

SUMMARY. — *The practical method of calculating trajectories, which consists in dividing space in successive intervals where the potential is approached by distributions for which the trajectories are known, is extended to calculation of third-order aberrations. It emerges that in these conditions the expressions giving these aberrations can be completely integrated. Formulæ to be applied in practice are developed. Results obtained by this method of approximation are in perfect accord in all known cases, with results obtained by the direct method. In application, all third-order aberrations in a magnetic or an electrostatic lens are calculated as a function of the power of the lens.*

INTRODUCTION.

Dans la première partie de l'étude, on examine l'exactitude avec laquelle on obtient en optique électronique dans un système de révolution les éléments de l'optique gaussienne, soit la position et la grandeur de l'image, et les trajectoires des électrons voisins de l'axe, lorsqu'on remplace la distribution de potentiel le long de l'axe par une autre distribution légèrement différente. On trouve que cette manière de faire est permise dans de très larges limites pour le calcul des trajectoires, celles-ci étant obtenues avec une bonne approximation à partir de distributions de potentiel approchées. On remplace donc la distribution de potentiel morceau par morceau le long de l'axe par d'autres distributions de potentiel pour lesquelles on sait calculer les trajectoires. On dérive pour un potentiel divisé en plusieurs domaines successifs, les expressions donnant les trajectoires et les éléments du premier ordre, dans la forme où nous en aurons besoin par la suite. Les aberrations chromatiques se déduisent immédiatement des expressions ainsi trouvées.

Dans la seconde partie de l'étude, on examine les facteurs dont dépendent les aberrations du troisième ordre. Dans les systèmes purement électrostatiques, on voit qu'il suffit de tenir compte de la seconde dérivée du potentiel le long de l'axe, car on arrive à éliminer les dérivées supérieures en intégrant par parties les expressions donnant les aberrations. Ceci une fois reconnu, la seconde dérivée du potentiel est approchée par une fonction en escaliers composée de constantes valables dans des intervalles successifs. On trouve qu'il est possible d'intégrer complètement dans ce cas toutes les expressions donnant les aberrations du troisième ordre. On discute mathématiquement l'ordre de grandeur de l'erreur commise sur les aberrations pour une approximation donnée de la dérivée seconde

du potentiel. Dans le cas du champ magnétique, on trouve un procédé analogue pour intégrer complètement les expressions donnant toutes les aberrations.

Les formules ainsi obtenues permettent déjà le calcul complet des aberrations du troisième ordre pour un système quelconque de révolution, avec l'approximation souhaitable. Un paragraphe est encore consacré à la réduction des aberrations dans le miroir électronique.

Dans la suite de l'étude, on considère la manière dont les aberrations dépendent de la position de l'objet et du diaphragme limitant le faisceau par rapport à la lentille. Pour s'en faire une idée, il n'est pas nécessaire de calculer les aberrations à nouveau pour chaque position de l'objet ou du diaphragme. On trouve qu'il suffit d'avoir calculé les coefficients d'aberration pour le cas où l'objet se trouve au foyer et le diaphragme à l'infini du côté objet, ou au foyer du côté image (éclairage parallèle). Les formules donnant toutes les aberrations du troisième ordre pour n'importe quelle position de l'objet ou du diaphragme en fonction de ces coefficients sont indiquées.

La troisième partie contient des applications. On étudie successivement une lentille magnétique et une lentille électrostatique pour lesquelles l'aberration de sphéricité a été calculée exactement par Glaser et par Zworykin respectivement. Les résultats trouvés par notre méthode approchée pour cette aberration concordent avec les valeurs données par ces auteurs. Pour finir, nous avons encore calculé pour ces deux lentilles toutes les autres aberrations du troisième ordre en fonction de la puissance de la lentille.

I. PROPRIÉTÉS DE L'OPTIQUE ÉLECTRONIQUE DU PREMIER ORDRE.

1.1. Influence de petites modifications du potentiel sur la trajectoire des électrons.

Posons-nous la question de savoir avec quelle exactitude il est nécessaire de connaître le potentiel pour obtenir la trajectoire d'un électron avec une précision voulue. Le plus simple est de partir de l'équation des rayons paraxiaux dans un plan méridien d'un système de révolution, sous la forme

$$v'' + \frac{3}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^{2} v = 0,$$

où $\Phi(z)$ représente le potentiel sur l'axe z et v la distance r de l'électron à l'axe, multipliée par $\Phi^{\frac{1}{4}}$ [1]. Le signe prime désigne une dérivée par rapport à z. Nous conviendrons que le potentiel Φ soit égal à zéro à l'endroit où la vitesse de l'électron est nulle.

L'erreur v qui se produit lorsque Φ diffère du potentiel réel d'une petite quantité Φ s'obtient au moyen de l'équation

$$v'' + \frac{3}{16}\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)^{2} v = -\frac{3}{8}\frac{\Phi'}{\Phi} f v,$$

où f exprime l'erreur commise sur le rapport $\frac{\Phi'}{\Phi}$, qui est égale à

$$f = \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{\Phi\Phi'}{\Phi^{2}}.$$

L'erreur v commise sur la trajectoire devient donc

$$v(z) = -\frac{3}{8}(pq' - p'q)^{-1}\int_{x=z_0}^{x=z}\frac{\Phi'}{\Phi} f v\,[p\,q(z) - p(z)\,q]\,dx,$$

où p et q désignent les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle des rayons paraxiaux, dont v est une combinaison linéaire [2]. De plus x est la variable d'intégration et z_0 la coordonnée du point où commence la trajectoire. Le déterminant de Wronski au dénominateur devant l'intégrale est égal à $\Phi^{\frac{1}{2}}(r_p r_{q'} - r_{p'} r_q)$ qui reste constant tout le long de l'axe des z, r_p et r_q étant les trajectoires attachées à p et q ([1], p. 75).

On peut déjà conclure de la forme de cette dernière équation que si par exemple l'axe est divisé en intervalles où la courbe du potentiel est chaque fois approchée par une autre fonction, la correction totale est la somme des corrections obtenues pour chaque intervalle. En première approximation, on peut donc négliger l'erreur dans la trajectoire provenant d'un intervalle, pour le calcul de l'erreur commise dans l'intervalle suivant. Il devient ainsi possible, lors de l'approximation d'un potentiel donné, par une suite de fonctions commodes pour le calcul, de surveiller l'exactitude du procédé au fur et à mesure qu'on passe d'un intervalle au suivant.

Pour se rendre compte de l'ordre de grandeur de la déviation de la trajectoire dans un intervalle comparativement à l'erreur commise dans l'appréciation du potentiel, le plus simple est de développer en série le potentiel à partir du commencement de l'intervalle

$$\Phi = 1 + az + bz^{2} + \ldots$$

et de calculer la trajectoire avec les deux premiers termes de ce développement. Nous ne faisons donc rien d'autre que de contrôler l'exactitude de la

méthode de Gans de calcul des trajectoires par approximation du potentiel au moyen d'un contour polygonal. On trouve tout d'abord comme solutions particulières linéairement indépendantes les fonctions

$$p = (1 + az)^{\frac{3}{4}}, \qquad q = (1 + az)^{\frac{1}{4}}$$

dont les valeurs initiales ont été posées égales à 1 au commencement de l'intervalle. Ensuite, l'erreur commise sur le potentiel étant maintenant

$$\Phi = bz^2,$$

on trouve pour f l'expression

$$f = \frac{2bz}{1 + az}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{az}{1 + az}\right) \simeq \frac{2bz}{1 + az},$$

la dernière expression étant approchée, car il est dans la ligne de notre calcul de considérer la quantité az comme petite par rapport à 1, si les intervalles ne sont pas trop grands. On obtient ainsi, pour les déviations des deux solutions particulières à l'extrémité $z = L$ de l'intervalle

$$\begin{Bmatrix} p(L) \\ q(L) \end{Bmatrix} = \frac{3}{2} b \int_0^L \frac{z}{1 + az} \begin{Bmatrix} q(L)(1 + az)^{\frac{1}{2}} - p(L) \\ q(L) - p(L)(1 + az)^{-\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} dz$$
$$= \frac{3}{4} bL^2[q(L) - p(L)] = -\frac{3}{8} bL^2 aL(1 + aL)^{\frac{1}{4}}$$

et pour leurs dérivées

$$p'(L) = q'(L) = \frac{3}{4} bL^2[q'(L) - p'(L)]$$
$$= -\frac{3}{8} bL^2 a(1 + aL)^{-\frac{1}{4}}.$$

Mais la trajectoire du premier ordre, construite à partir des fonctions p et q, est

$$r = \Phi^{-\frac{1}{4}}(C_1 p + C_2 q), \qquad C_1 = \frac{2}{a} r'_0, \qquad C_2 = r_0,$$

où r_0 et r'_0 représentent les valeurs initiales. On obtient pour l'erreur commise sur la trajectoire l'expression

$$r(L) = \Phi^{-\frac{1}{4}}(C_1 p + C_2 q) = -\frac{3}{8} bL^2(2r'_0 L + r_0 aL),$$

de plus, pour l'erreur commise sur la dérivée de la trajectoire,

$$r'(L) = -\frac{a}{4}\Phi^{-\frac{5}{4}}(C_1 p + C_2 q) + \Phi^{-\frac{1}{4}}(C_1 p' + C_2 q')$$
$$= -\frac{3}{8} bL^2(ar_0 + 2r'_0) = \frac{r(L)}{L}.$$

Dans ces expressions bL^2 est l'erreur relative commise dans l'appréciation du potentiel à la fin de l'intervalle.

Il est ainsi démontré que, dans un intervalle, la trajectoire est rendue avec au moins la même précision relative que celle qu'avait le potentiel. Si l'on rend plus fine la division, en augmentant le nombre d'intervalles, la précision ne peut que croître.

1.2. **Optique électronique du premier ordre d'un système composé de plusieurs intervalles consécutifs.**

Divisons l'axe du système en intervalles, où le potentiel est chaque fois approché par des fonctions pour lesquelles on peut résoudre l'équation paraxiale. On peut donc établir une relation linéaire

$$\begin{pmatrix} r_{k+1} \\ \dot r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_k \\ \dot r_k \end{pmatrix}$$

entre les données de la trajectoire (coordonnée et dérivée par rapport au temps) au commencement de l'intervalle considéré (z_k, z_{k+1}) et les mêmes données de la trajectoire à la fin de cet intervalle. Les points placés sur les lettres indiquent une dérivation par rapport au temps. Dans l'approximation paraxiale, on a

$$\dot z = \sqrt{u}, \qquad \dot r = r'\sqrt{u},$$

avec l'abréviation u désignant la grandeur proportionnelle au potentiel

$$u = -\frac{2e}{m}\Phi(z),$$

où e et m désignent la charge et la masse de l'électron. Ainsi u est le carré de la vitesse instantanée de l'électron.

Si une lentille se compose de plusieurs éléments de ce genre, on aura

$$\begin{pmatrix} r_s \\ \dot r_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_e \\ \dot r_e \end{pmatrix},$$

où les indices e et s se réfèrent à l'entrée et à la sortie et où la matrice est égale au produit des matrices élémentaires dans l'ordre convenable.

Considérons que cette lentille se trouve entre deux régions où le potentiel est constant. Pour un rayon entrant à une distance 1 et parallèlement à l'axe, c'est-à-dire avec

$$r_e = 1, \qquad r'_e = 0,$$

on aura à la sortie

$$r_s = A, \qquad r'_s = \frac{C}{n}$$

et pour les coordonnées z_F et z_P du foyer et du

plan principal côté image et la distance focale f' côté image les relations

$$z_{F'} - z_s = -\frac{n' A}{C}, \qquad z_{F'} - z_{P'} = f' = -\frac{n'}{C}.$$

De même pour un électron sortant de la lentille à la distance 1 de l'axe et parallèlement à ce dernier, c'est-à-dire avec

$$r_s = 1, \qquad r'_s = 0,$$

on aura pour les valeurs à l'entrée

$$r_e = D, \qquad r'_e = -\frac{C}{n}$$

et pour les coordonnées z_F et z_P du foyer et du plan

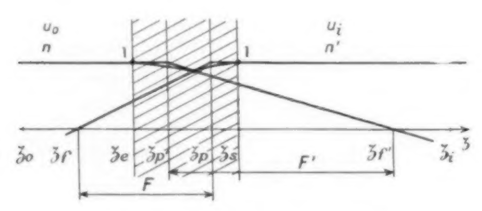


Fig. 1. — Éléments d'une lentille se trouvant entre deux régions de potentiel constant.

principal, côté objet, et la distance focale f côté objet, les relations

$$z_F - z_e = \frac{nD}{C}, \qquad z_F - z_P = f = \frac{n}{C},$$

car le déterminant de la matrice se trouve toujours égal à 1, en raison du théorème de Lagrange. Les grandeurs affectées du signe prime se rapportent à l'espace image (c'est-à-dire sortie des électrons) et les grandeurs non affectées de ce signe à l'espace objet (côté entrée des électrons). De plus, la lettre n représente l'indice de réfraction électronique, qui est dans les deux domaines

$$n = \sqrt{u_o}, \qquad n' = \sqrt{u_i},$$

où u_o et u_i sont proportionnels aux potentiels dans les espaces objet et image. Les indices o et i serviront à désigner l'objet et l'image.

Ces différents éléments sont représentés à la figure 1. Avec les conventions de signe faites (z dans le même sens dans l'espace objet et l'espace image), pour une lentille convergente f' est positif et f négatif.

Les distances focales, les plans principaux et les foyers étant ainsi déterminés, nous pouvons en déduire pour la position z_i de l'image gaussienne et son grandissement $\frac{r_i}{r_o}$ la relation

$$\frac{r_i}{r_o} = \frac{f}{z_F - z_o} = \frac{z_{F'} - z_i}{f'}.$$

1.3. **Dérivation des aberrations chromatiques à partir des propriétés de l'image Gaussienne.**

Les aberrations chromatiques proviennent du fait que des électrons animés de vitesses initiales différentes concourent à la formation de l'image. Les aberrations sont principalement déterminées par les modifications de l'image du premier ordre (gaussienne) qui se produisent lorsqu'on passe d'une vitesse initiale à une autre. Nous considérerons donc les trajectoires qu'on obtient lorsque tous les potentiels u sont modifiés de la même quantité εu_0, et nous chercherons quelle sera, dans le cas de petits ε, la figure de dispersion dans le plan image, que nous définirons par la condition $\varepsilon = 0$.

Les éléments A, B, C, D de la matrice définie dans le paragraphe 2 sont calculables dans chaque cas et sont fonctions du potentiel. On peut donc toujours calculer les différentielles ΔA, ΔB, ΔC ainsi que Δn, $\Delta n'$ et l'on obtient facilement pour les variations des principales grandeurs caractérisant la lentille, les relations suivantes :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta C}{C}, \qquad \frac{\Delta f'}{f'} = \frac{\Delta n'}{n'} - \frac{\Delta C}{C},$$

$$\Delta z_F = \frac{D}{C}\Delta n + \frac{n}{C}\Delta D - \frac{nD}{C^2}\Delta C,$$

$$\Delta z_{F'} = -\frac{1}{C}\Delta n' - \frac{n'}{C}\Delta A + \frac{n'A}{C^2}\Delta C.$$

On en tire aisément la variation relative du grandissement

$$\frac{\Delta\left(\frac{r_i}{r_o}\right)}{\frac{r_i}{r_o}} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta z_F}{z_o - z_F}$$

et le déplacement du plan de l'image

$$\Delta z_i = \Delta z_{F'} + \frac{ff'}{z_o - z_F}\left(\frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta f'}{f'} + \frac{\Delta z_F}{z_o - z_F}\right).$$

Pour une trajectoire définie par ses coordonnées r_0 et r_D respectivement dans le plan objet o et le plan du diaphragme D' (côté image), l'aberration chromatique complète se compose comme suit :

$$\Delta r_i = r_o \Delta\left(\frac{r_i}{r_o}\right) + \Delta z_i . r'_i.$$

Le premier terme est dû à l'erreur de grandissement, le second au déplacement du plan de l'image.

1.4. Application : optique gaussienne d'un intervalle où le potentiel varie comme un arc de parabole, placé entre deux régions de potentiel constant.

Considérons un intervalle (z_k, z_{k+1}) de l'axe d'un sytème et supposons que le potentiel normalisé u varie selon la loi

$$u = b + 2a(z - m)^2,$$

b désignant la valeur extrême du potentiel u et m l'abscisse de celui-ci, qui peut d'ailleurs tomber en dehors de l'intervalle. En dérivant deux fois, on voit que

$$2a = \frac{1}{2}\overline{u''_{k,k+1}},$$

$\overline{u''_{k,k+1}}$ étant la valeur de la dérivée seconde du potentiel dans l'intervalle considéré. Nous l'avons surligné pour indiquer que, si le potentiel n'était pas rigoureusement parabolique, c'est une valeur moyenne de la dérivée seconde qu'on devrait prendre.

L'équation newtonienne de la trajectoire

$$mr'' = e\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = e\frac{r}{2}\Phi''$$

s'écrit avec notre notation

$$r'' = \frac{e}{m}\Phi''\frac{r}{2} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{2e}{m}\Phi''\right)r = -ar$$

et a pour solution

$$\begin{pmatrix} r_{k+1} \\ r'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\cos\\ \mathrm{ch}\end{matrix}\,\alpha & \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}\begin{matrix}\sin\\ \mathrm{sh}\end{matrix}\,\alpha \\ \mp\sqrt{|a|}\begin{matrix}\sin\\ \mathrm{sh}\end{matrix}\,\alpha & \begin{matrix}\cos\\ \mathrm{ch}\end{matrix}\,\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_k \\ r'_k \end{pmatrix}$$
$$(a \gtrless 0).$$

Les fonctions supérieures sont applicables dans le cas où a est positif, les fonctions inférieures dans l'autre cas.

L'angle α désigne dans ces relations

$$\alpha = \sqrt{|a|}\,(t_{k+1} - t_k),$$

t_k et t_{k+1} étant les instants de passage de l'électron en z_k et z_{k+1}, soit à l'entrée et à la sortie de l'intervalle considéré, et pour lesquels on a la relation

$$t_{k+1} - t_k = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{dz}{\sqrt{b + 2a(z-m)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2|a|}}\left[\begin{matrix}\mathrm{arsh}\\ \mathrm{arc\,sin}\end{matrix}\sqrt{\frac{2|a|}{b}(z-m)^2}\right]_{z_k}^{z_{k+1}}$$
$$(a \gtrless 0),$$

en supposant b positif, ce qui est le cas la plupart du temps.

Les relations ainsi établies nous permettent de calculer les éléments du premier ordre d'une portion de lentille fictive constituée par un domaine où le potentiel a une variation parabolique le long de l'axe, limité par deux plans parallèles, en dehors duquel le potentiel est constant, et égal au potentiel des extrémités de l'intervalle.

Il est très utile de se rendre compte de la convergence qu'apporte à un système telle ou telle portion de la courbe de potentiel le long de l'axe.

Pour cette raison, nous allons donner les convergences et les positions du foyer en fonction du rapport des potentiels des espaces objet et image pour les deux cas particuliers suivants, où a est positif et négatif et où l'extremum de la parabole est à l'entrée de l'intervalle, dont l'épaisseur est E.

On trouve sans peine les résultats suivants :

Cas 1 :

$$a > 0, \qquad u_i > u_o, \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arsh}\sqrt{\frac{u_i - u_o}{u_o}};$$

$$A = \cos\alpha_1; \qquad C = -\frac{\sin\alpha_1}{E}\sqrt{\frac{u_i - u_o}{2}};$$

$$\frac{E}{z_{F'} - z_s} = \sqrt{\frac{u_i - u_o}{2u_i}}\,\mathrm{tg}\,\alpha_1; \quad \frac{E}{f'} = \sqrt{\frac{u_i - u_o}{2u_i}}\sin\alpha_1;$$

$$\frac{E}{z_F - z_e} = -\sqrt{\frac{u_i}{u_o}}\,\frac{E}{z_{F'} - z_s}; \qquad \frac{E}{f} = -\sqrt{\frac{u_i}{u_o}}\,\frac{E}{f'}.$$

Les quatre dernières grandeurs sont représentées en fonction de $\frac{u_i}{u_o}$ sur la figure 2. On voit que l'élément se comporte comme une lentille convergente, f' étant positif.

Cas 2 :

$$a < 0. \qquad u_i < u_o, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,sin}\sqrt{\frac{u_o - u_i}{u_o}};$$

$$A = \mathrm{ch}\,\alpha_2; \qquad C = \frac{\mathrm{sh}\,\alpha_2}{E}\sqrt{\frac{u_o - u_i}{2}};$$

$$\frac{E}{z_{F'} - z_s} = -\sqrt{\frac{u_o - u_i}{2u_i}}\,\mathrm{th}\,\alpha_2; \quad \frac{E}{f'} = -\sqrt{\frac{u_o - u_i}{2u_i}}\,\mathrm{sh}\,\alpha_2;$$

$$\frac{E}{z_F - z_e} = -\sqrt{\frac{u_i}{u_o}}\,\frac{E}{z_{F'} - z_s}; \qquad \frac{E}{f} = -\sqrt{\frac{u_i}{u_o}}\,\frac{E}{f'}.$$

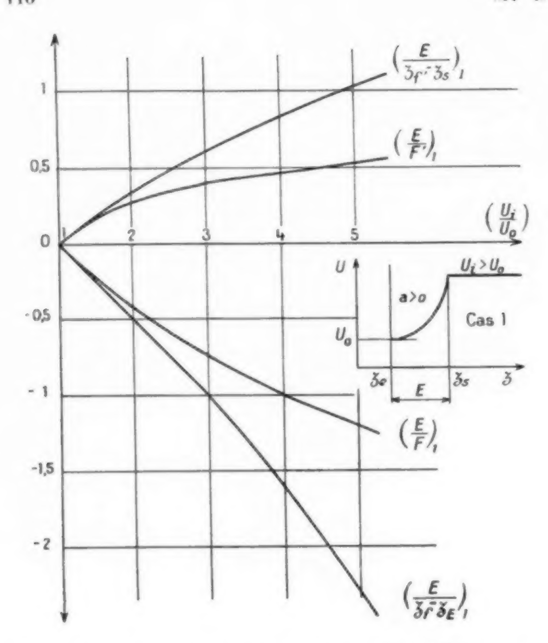


Fig. 2. — Optique du premier ordre d'un élément de lentille où le potentiel sur l'axe croît comme un arc de parabole.

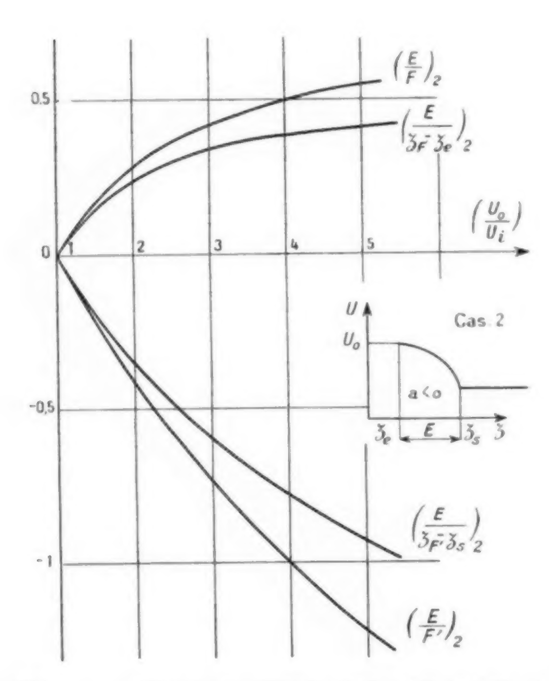


Fig. 3. — Optique du premier ordre d'un élément de lentille où le potentiel décroît comme un arc de parabole.

Les quatre dernières grandeurs sont représentées, en fonction de $\frac{u_0}{u_i}$ sur la figure 3. On voit que l'élément se comporte comme une lentille divergente, f' étant négatif.

2. LES ABERRATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

2.1. De la dérivation des aberrations du troisième ordre par la méthode de l'iconal et par la méthode des trajectoires. Preuve de l'identité physique et mathématique des deux méthodes.

a. Méthode de l'iconal. — Désignons d'une façon générale par n l'indice de réfraction de l'optique électronique. Il est lié au potentiel électrique par la relation suivante dans le cas où il n'y a pas de champ magnétique

$$n = \sqrt{-\frac{2e}{m}\varphi},$$

où φ est le potentiel dans l'espace, qui se développe pour un système de révolution de la façon suivante :

$$\varphi(r, z) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi'' + \frac{r^4}{64}\Phi^{\text{IV}} - \ldots,$$

$\Phi(z)$ étant le potentiel sur l'axe des z.

L'intégrale du chemin optique le long de la trajectoire est appelée iconal; on peut la prendre entre l'objet et l'image

$$E_{oi} = \int_o^i n\,\mathrm{d}s.$$

Lorsqu'on introduit pour n, la valeur tirée de la série précédente et pour $\mathrm{d}s$ sa valeur tirée de l'expression

$$\mathrm{d}s^2 = (1 + r'^2)\,\mathrm{d}z^2,$$

on obtient pour l'iconal, le développement suivant :

$$E_{oi} = \int_o^i \sqrt{u}\left[1 + \frac{1}{2}\left(r'^2 - \frac{r^2}{4}\frac{u''}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{r^4}{64}\frac{u^{\text{IV}}}{u} - \frac{r'^2 r^2}{4}\frac{u''}{u}\right) - \frac{1}{8}\left(r'^2 - \frac{r^2}{4}\frac{u''}{u}\right)^2 + \ldots\right]\mathrm{d}z,$$

où nous avons remplacé $-\frac{2e}{m}\Phi$ par la notation u.

Il contient les puissances paires de r ou r'. L'optique du premier ordre est dérivée des termes du second ordre en r ou r'.

Pour les aberrations du troisième ordre, il suffit

de considérer les termes du quatrième ordre en r ou r', que nous appellerons E_{oi4}.

$$E_{oi4} = \frac{1}{8}\int_0^l \sqrt{u}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{r}{2}\right)^4\left(u^{IV} - \frac{u''^2}{u}\right) - \frac{u''}{2u} r^2 r'^2 - r'^4\right] dz.$$

Glaser a démontré [4] qu'il suffisait de prendre les dérivées partielles de E_{oi4} par rapport à

$$-n'\left(\frac{dx}{dz}\right)_i \quad \text{et} \quad -n'\left(\frac{dy}{dz}\right)_i$$

pour obtenir les déviations Δx_i et Δy_i du troisième ordre du point image, par rapport à l'image gaussienne. x et y sont des axes perpendiculaires à z, n' est l'indice au lieu de l'image. Les trajectoires $r(z)$ peuvent être exprimées sous la forme d'une combinaison linéaire des deux solutions indépendantes de l'équation paraxiale passant l'une g par les points $r = 1$ du plan objet et $r = 0$ du plan de la pupille (ou diaphragme) de sortie D' et l'autre h par les points 0 du plan objet et 1 du plan de la pupille de sortie D' :

$$r = r_0 g + r_{D'} h.$$

On peut de plus démontrer que, pour le calcul des aberrations du troisième ordre, il suffit de se servir de trajectoires méridiennes, car on n'utilise que les trajectoires à l'approximation gaussienne. $x_{D'} y_{D'}$ et x_i, y_i étant les coordonnées de la trajectoire quelconque considérée pour ses aberrations dans le plan de la pupille (diaphragme) de sortie et dans le plan image, on a, par exemple, dans l'espace image (qu'on considère toujours comme homogène, même si l'image se trouve dans un lieu où l'indice varie, la pupille étant alors définie par le prolongement en ligne droite des rayons passant par l'image dans un espace hypothétique d'indice n') :

$$n'\left(\frac{dx}{dz}\right)_i = n'\frac{x_{D'} - x_i}{z_{D'} - z_i}.$$

Ainsi, il est possible d'exprimer les déviations, en fonction des coordonnées du point objet et du point où la trajectoire perce la pupille de sortie D', et l'on obtient

$$\Delta x_i = -\frac{z_{D'} - z_i}{n'}\frac{\partial E_{oi4}}{\partial x_{D'}}$$

et une équation analogue pour Δy_i.

Si l'on réduit cette déviation à l'échelle de l'objet en la divisant par le grandissement linéaire, on obtient l'aberration telle qu'elle serait vue dans le plan objet

$$\Delta x_0 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial E_{oi4}}{\partial x_{D'}}, \qquad \Delta y_0 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial E_{oi4}}{\partial y_{D'}},$$

où

$$\frac{1}{A_2} = -\frac{f'}{n'}\frac{z_{D'} - z_i}{z_{F'} - z_i}.$$

Dans des champs électrostatiques de révolution, l'iconal est seulement fonction des grandeurs

$$a = x_0^2 + y_0^2, \qquad b = 2(x_0 x_{D'} + z_0 y_{D'}), \qquad c = x_{D'}^2 + y_{D'}^2,$$

et en posant pour les termes du quatrième ordre en r ou r' de l'iconal, l'expression suivante à calculer

$$E_{oi4} = \frac{1}{4}(B_{11}a^2 + B_{22}b^2 + B_{33}c^2 + 2B_{12}ab + 2B_{23}bc + 2B_{13}ac),$$

on trouve

$$\Delta r_0 = \frac{1}{A_2}(B_{12}a + B_{22}b + B_{23}c)x_0 + \frac{1}{A_2}(B_{13}a + B_{23}b + B_{33}c)x_{D'}$$

et

$$\Delta y_0 = \frac{1}{A_2}(B_{12}a + B_{22}b + B_{23}c)y_0 + \frac{1}{A^2}(B_{12}a + B_{23}b + B_{33}c)y_{D'}.$$

Dans cette expression, les aberrations sont données respectivement par les coefficients suivants :

L'aberration de sphéricité par $\frac{B_{33}}{A_2}$;

la distorsion par $\frac{B_{12}}{A_2}$;

la coma par $\frac{B_{23}}{A_2}$;

l'astigmation et la courbure du champ ensemble par $\frac{B_{22}}{A_2}$ et $\frac{B_{13}}{A_2}$.

Pour ces dernières, par exemple, nous aurons, si nous considérons un point objet situé sur l'axe des x, avec $y_0 = 0$:

$$\Delta x_0 = \frac{2B_{22} + B_{13}}{A_2}x_0^2 x_{D'}, \qquad \Delta y_0 = \frac{B_{13}}{A_2}x_0^2 x_{D'}.$$

La formation de ces aberrations est d'habitude expliquée au moyen des surfaces sagittale et tangentielle. Puisque les aberrations sont déjà réduites à l'espace objet, appelons L, la distance de la pupille d'entrée à l'objet et définissons par ρ_s et ρ_t le rayon de courbure des surfaces susdites ramenées dans l'espace objet :

$$L = z_0 - z_D; \qquad \rho_{s,t} = z_0 - z_{s,t},$$

$z_{s,t}$ étant le centre de courbure de la surface sagittale ou tangentielle réduite à l'espace objet.

On a ainsi, pour les aberrations

$$\Delta x_0 = -\frac{x_0^2 x_D}{2L\rho_s}, \qquad \Delta y_0 = -\frac{x_0^2 x_D}{2L\rho_t}$$

et pour les courbures

$$\frac{1}{\rho_s} = -2L\,\frac{2B_{22}+B_{13}}{A_2}\,\frac{x_{D'}}{x_D}, \qquad \frac{1}{\rho_t} = -2L\,\frac{B_{13}}{A_2}\,\frac{x_{D'}}{x_D}.$$

Leur demi-différence donne l'astigmatisme, la demi-somme des courbures, la courbure moyenne de champ. La courbure de Petzval serait

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_t} - \frac{3}{\rho_s}\right) = -2L\,\frac{B_{22}-B_{13}}{A_2}\,\frac{x_{D'}}{x_D}.$$

b. Méthode des trajectoires. — La méthode des trajectoires a été développée par Scherzer et Bruche [5].

Nous avons exposé, en bref, la méthode de l'iconal, pour fixer les notations dont nous aurons besoin par la suite, lorsque nous montrerons comment on arrive à le calculer pratiquement. Nous allons maintenant démontrer mathématiquement l'identité des expressions pourtant bien différentes, obtenues par les deux méthodes. Ceci ne semble pas encore avoir été fait dans la littérature. Nous nous inspirerons, pour commencer, d'un calcul de Recknagel [6]. Le développement de ces équations nous permettra, d'ailleurs, d'ajouter une remarque sur les miroirs dans un prochain paragraphe.

Les équations de Newton, dont nous avons à nous occuper sont

$$\ddot{z} = \frac{u'}{2} - \frac{r^2}{8}u''', \qquad \ddot{r} = -\frac{r}{4}u'' + \frac{r^3}{32}u^{\text{IV}}.$$

Il n'est pas nécessaire de considérer des termes encore plus petits pour les aberrations du troisième ordre, car on ne considère que des trajectoires qui demeurent près de l'axe, bien qu'elles puissent être aussi inclinées sur l'axe qu'on veut. On obtient, avec le premier terme du développement, l'optique gaussienne. En multipliant par $2\dot{z}$, il vient

$$(\dot{z}^2)^{\cdot} = \dot{u}, \qquad \dot{z}^2 = u,$$

u étant comme par le passé fixé à zéro quand la vitesse de l'électron est nulle.

La seconde équation donne, avec

$$\dot{r} = r'\dot{z} \qquad \ddot{r} = \dot{z}^2 r'' + \ddot{z}\,r',$$

l'équation paraxiale

$$u r'' + \frac{1}{2}u' r' + \frac{1}{4}u'' r = 0.$$

(Cette équation est encore valable, par exemple, au sommet d'une trajectoire dans un miroir.)

Les aberrations apparaissent lorsqu'on ajoute les termes de degré supérieur. Dans les équations du mouvement, introduisons les solutions trouvées pour z et r en fonction du temps dans les termes petits. Nous obtenons dans l'approximation supérieure, par multiplication avec $2\dot{z}$ et $2\dot{r}$:

$$(\dot{z}^2)^{\cdot} = \dot{z}\left(u' - \frac{r^2}{4}u'''\right); \qquad (\dot{r}^2)^{\cdot} = \dot{r}\left(-\frac{r}{2}u''\right),$$

d'où l'on tire

$$(\dot{z}^2)^{\cdot} = \dot{u} - \frac{r^2}{4}\dot{u}''; \qquad (\dot{r}^2)^{\cdot} = \left(-\frac{r^2}{4}u''\right)^{\cdot} + \frac{r^2}{4}\dot{u}''$$

et pour l'expression du carré de la vitesse en fonction du temps

$$\dot{z}^2 + \dot{r}^2 = u - \frac{r^2}{4}u'',$$

qui est la relation de l'énergie en seconde approximation, que nous allons utiliser pour déterminer z à l'approximation supérieure. Pour les grandeurs z et r posons

$$r = r_1 + \bar{r}, \qquad z = z_1 + \bar{z},$$

où r_1 et z_1 sont les grandeurs calculées jusqu'à présent et les lettres surlignées les corrections à ajouter à ces grandeurs. Nous laisserons tomber l'indice 1 lorsqu'il n'y aura pas de risques de confusion. Il vient, en négligeant les carrés de grandeurs petites

$$\dot{z}_1^2 + 2\dot{z}_1\dot{\bar{z}} = u + \bar{z}u' - \frac{r^2}{4}u'' - \dot{r}^2$$

et l'équation différentielle

$$\dot{\bar{z}} - \bar{z}\frac{u'}{2\dot{z}} + \frac{1}{2\dot{z}}\left(\frac{r^2}{4}u'' + \dot{r}^2\right) = 0.$$

Si l'on considère que

$$\frac{u'}{2\dot{z}} = \frac{\dot{u}}{2u},$$

on trouve comme solution de l'équation différentielle pour la correction

$$\bar{z} = -\sqrt{u}\int_0^t \frac{1}{2u}\left(\frac{r^2}{4}u'' + \dot{r}^2\right)dt,$$

quand on compte le temps à partir du moment où l'électron quitte l'objet.

Calculons maintenant la correction $\bar{r}$, en utilisant le terme $\frac{r^3 u^{\text{IV}}}{32}$. En même temps, il faut encore dans le premier terme $-\frac{ru''}{4}$ augmenter la grandeur u'' de la quantité $\bar{z}u'''$. Il vient

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\bar{r}}{4}u'' = \frac{r^3}{32}u^{\text{IV}} - \frac{r}{4}\bar{z}\,u'''.$$

Le côté gauche est de nouveau l'équation paraxiale,

le côté droit une fonction connue du temps. La solution complète de cette équation inhomogène est

$$\bar{r} = (hg^{\cdot} - h^{\cdot} g)^{-1} \int_{s=0}^{s=t} [h\, g(t) - h(t)\, g] \times \left(\frac{r^3}{32} u^{\mathrm{IV}} - \frac{r}{4} \bar{z}\, r'''\right) \mathrm{d}s,$$

où s joue le rôle de la variable d'intégration. Le terme contenant z dans l'intégrale de droite donne, avec

$$u''' = \frac{u''^{\cdot}}{z^{\cdot}},$$

l'intégrale

$$-\int u''^{\cdot} \frac{r}{4} [hg(t) - h(t)\, g] \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right) \mathrm{d}s$$
$$= \int u'' \, [hg(t) - h(t)\, g] \frac{r}{4} \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right)^{\cdot} \mathrm{d}s$$
$$+ \int \frac{u''}{4} \left\{ r^{\cdot} [h\, g(t) - h(t)\, g] + r\, [h^{\cdot} g(t) - h(t)\, g^{\cdot}] \right\} \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right) \mathrm{d}s.$$

La seconde intégrale de droite ci-dessus, avec

$$r \frac{u''}{4} = - r^{\cdot\cdot}$$

donne

$$-r^{\cdot}(h^{\cdot} g - hg^{\cdot}) \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right) + \int r^{\cdot} [h^{\cdot} g(t) - h(t)\, g^{\cdot}] \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right)^{\cdot} \mathrm{d}s$$
$$+ \int r^{\cdot} \left[\left(\frac{h}{4} u'' + h^{\cdot\cdot}\right) g(t) - h(t) \left(\frac{g}{4} u'' + g^{\cdot\cdot}\right)\right] \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right) \mathrm{d}s,$$

où la toute dernière intégrale est identiquement nulle parce que h et g sont solutions de l'équation paraxiale qu'on reconnaît dans le déterminant.

La déviation du troisième ordre à un endroit z de la trajectoire est la différence entre les trajectoires du premier et du troisième ordre en ce point, soit

$$\Delta r = r - \bar{z}\, r' = \bar{r} - \bar{z} \frac{r^{\cdot}}{z^{\cdot}},$$

d'où

$$(hg^{\cdot} - h^{\cdot} g)\, \Delta r = \int_0^t \frac{r^3}{32} u^{\mathrm{IV}} [hg(t) - h(t)\, g]\, \mathrm{d}s$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right)^{\cdot} \left\{ \frac{r}{4} u'' [h\, g(t) - h(t)\, g] + r^{\cdot} [h^{\cdot} g(t) - h(t)\, g^{\cdot}] \right\} \mathrm{d}s.$$

En particulier, on a, pour le plan de l'image gaussienne,

$$h(z_i) \equiv 0,$$

et il vient

$$-h_i^{\cdot}\, \Delta r_i = \int_0^{t_i} \left[\frac{r^3}{32} u^{\mathrm{IV}} h + \left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right)^{\cdot} \left(\frac{r}{4} u'' h + r^{\cdot} h^{\cdot}\right)\right] \mathrm{d}s,$$

où il faut introduire

$$\left(\frac{\bar{z}}{z^{\cdot}}\right)^{\cdot} = -\frac{1}{2u} \left(\frac{r^2}{4} u'' + r^{\cdot 2}\right).$$

On obtient ainsi pour l'aberration

$$\Delta r_i = \frac{1}{h_i^{\cdot}} \int_0^{t_i} \left[\frac{r^3}{32} \left(\frac{u''^2}{u} - u^{\mathrm{IV}}\right) + r r^{\cdot 2} \frac{u''}{u}\right] h\, \mathrm{d}s$$
$$+ \frac{1}{h_i^{\cdot}} \int_0^{t_i} \left[r^2 r^{\cdot} \frac{u''}{8u} + \frac{r^{\cdot 3}}{2u}\right] h^{\cdot}\, \mathrm{d}s.$$

Cette expression peut être aisément interprétée comme la dérivée partielle par rapport à r_D de

$$-E_{oi4} = \frac{1}{8} \int_0^{t_i} \left[\frac{r^4}{16} \left(\frac{u''^2}{u} - u^{\mathrm{IV}}\right) + \frac{r^2 r^{\cdot 2}}{2} \frac{u''}{u} + \frac{r^{\cdot 4}}{u}\right] \mathrm{d}s$$

multipliée encore par $\frac{1}{h_i^{\cdot}}$. Or, on sait que

$$h_i^{\cdot} = \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)_i = \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z}\right)_i \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{n'}{z_{D'} - z_i}.$$

Remplaçons encore dans l'intégrale précédente les dérivées par rapport au temps par les dérivées par rapport à z, selon

$$\frac{d}{\mathrm{d}t} = \sqrt{u} \frac{d}{\mathrm{d}z}$$

et remplaçons ds, qui n'est autre que dt par sa valeur $\frac{1}{\sqrt{u}}$ dz. Il vient

$$-E_{oi4} = \frac{1}{8} \int_0^{t_i} \left[\frac{r^4}{16} \left(\frac{u''^2}{u} - u^{\mathrm{IV}}\right) + \frac{r^2 r'^2}{2} u'' + u r'^4\right] \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{u}},$$

où l'on voit que c'est l'expression exacte trouvée précédemment pour l'iconal du quatrième ordre.

2.2. Calcul complet des intégrales donnant l'iconal dans le cas où la dérivée seconde du potentiel le long de l'axe est une constante.

L'identité absolue des expressions trouvée par les deux méthodes de l'iconal et des trajectoires étant désormais fermement établie, il convient de se demander laquelle on va prendre pour le calcul pratique des instruments d'optique. Généralement, la méthode des trajectoires était préférée, car Scherzer avait réussi à éliminer, par intégration par parties, la quatrième dérivée du potentiel le long de l'axe qu'il serait, d'ailleurs, illusoire de vouloir mesurer ou réaliser dans un appareil.

Nous sommes donc conduits à penser qu'une pareille élimination de u^{IV} dans l'iconal lui-même

est aussi possible et nous allons l'effectuer et donner une expression de l'iconal ne contenant que le potentiel et ses dérivées jusqu'à la seconde.

Bien plus, il apparaîtra que les intégrales donnant l'iconal sous cette forme sont directement intégrables dans le cas où la seconde dérivée du potentiel est considérée comme constante.

Cette constatation permettra le calcul complet des aberrations de tout système pour lequel on aura approché la seconde dérivée du potentiel par des constantes successives.

Une discussion mathématique de la précision du procédé et la comparaison des résultats trouvés avec des résultats déjà connus permettra de prouver la viabilité de la méthode.

Soit donc à calculer

$$E_{o i 4}=\frac{1}{8}\int_{o}^{i}\sqrt{u}\left[\frac{1}{u}\left(\frac{r}{2}\right)^{4}\left(u^{\text{IV}}-\frac{u''^{2}}{u}\right)-\frac{u''}{2u}r^{2}r'^{2}-r'^{4}\right]\mathrm{d}z.$$

Considérons d'abord le terme en u^{IV} :

$$I=\frac{1}{128}\int_{o}^{i}u^{\text{IV}}r^{4}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{u}}$$
$$=\frac{1}{128}\left\{\left(\frac{r^{4}u'''}{\sqrt{u}}\right)_{o}^{i}+\int_{o}^{i}\left(\frac{1}{2}\frac{ru'}{u}-4r'\right)\frac{r^{3}u'''}{\sqrt{u}}\mathrm{d}z\right\}.$$

Une nouvelle intégration partielle et l'usage de l'équation paraxiale

$$r''=-\frac{1}{2u}\left(r'u'+\frac{1}{2}ru''\right)$$

couduit au développement

$$I=\frac{1}{128}\left[\frac{r^{4}u'''}{\sqrt{u}}+\frac{u''r^{2}}{\sqrt{u}}\left(\frac{u'}{2u}r^{2}-4rr'\right)\right]_{o}^{i}$$
$$+\frac{1}{128}\int_{o}^{i}\left(-\frac{3}{2}u''r^{2}+12ur'^{2}\right.$$
$$\left.-6rr'u'+\frac{3u'^{2}}{4u}r^{2}\right)\frac{u''r^{2}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}z.$$

Supposons connues les valeurs de la quantité entre crochets au lieu où se trouvent respectivement l'objet et l'image. Il ne nous reste qu'à évaluer l'intégrale qui suit et qui s'étend de l'objet à l'image. Elle ne contient plus que des dérivées allant jusqu'au second ordre u''.

Cette intégrale, nous voulons l'évaluer, approximativement, dans une portion (z_k, z_{k+1}) de l'intervalle (z_0, z_i), en considérant u'' comme pratiquement constant dans cet intervalle et sensiblement égal à une valeur moyenne

$$u''\simeq u''_{k,k+1}.$$

Pour r, on doit prendre les valeurs de l'équation paraxiale, lesquelles ne dépendent pas de u^{IV}.

L'expression développée pour I nous permet maintenant d'écrire l'expression suivante dans l'intervalle (z_k, z_{k+1}) pour l'intégrale cherchée

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left(-\frac{3}{2}u''r^{2}+\dots\right)\frac{u''r^{2}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}z$$
$$\simeq\int_{z_k}^{z_{k+1}}\left[\left(-\frac{3}{2}u''r^{2}+\dots\right)\frac{u''r^{2}}{u\sqrt{u}}\right]_{u''=u''_{k,k+1}}\mathrm{d}z$$
$$=-\bar{u}''_{k,k+1}\left[\frac{r^{2}}{\sqrt{u}}\left(\frac{u'}{2u}r^{2}-4rr'\right)\right]_{z_k}^{z_{k+1}}$$

puisque u''' et u^{IV} sont désormais identiquement nuls.

Toute l'intégrale de o à i se compose de la somme de telles contributions aux limites. On obtient ainsi

$$I=\frac{1}{128}\left\{\left(\frac{r^{4}u'''}{\sqrt{u}}\right)_{o}^{i}+\sum_{k\neq o,i}\left(u''_{k,k+1}-u''_{k,k-1}\right)\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{r^{2}}{\sqrt{u}}\left(\frac{u'}{2u}r^{2}-\frac{4rr'}{\sqrt{u}}\right)\right]^{z=z_k}\right\}.$$

Il reste à examiner si le reste des termes de E_{oi4} :

$$J=-\frac{1}{8}\int_{o}^{i}\left(\frac{u''^{2}}{16}r^{2}+\frac{u''}{2}r^{2}r^{\cdot 2}+r^{\cdot 4}\right)\frac{\mathrm{d}t}{u}$$

peuvent également s'intégrer complètement dans le cas où u'' est approché par des constantes successives. Au paragraphe 4 de la première partie, nous avons calculé les trajectoires dans le cas où le potentiel sur l'axe a une variation parabolique, et trouvé que r et r' dépendent des valeurs initiales r_k et r'_k multipliées par des fonctions sinus et cosinus circulaires ou hyperboliques du temps. Si l'on introduit ces fonctions dans la quantité à intégrer, on s'aperçoit qu'elles s'éliminent l'une l'autre de telle façon que cette quantité

$$a^{2}r^{4}+2ar^{2}r^{\cdot 2}+r^{\cdot 4}=(ar^{2}+r^{\cdot 2})^{2}$$

se révèle être indépendante du temps tout le long de l'intervalle et égale à sa valeur initiale. Il s'ensuit, avec l'aide de la relation

$$z^{\cdot}=\sqrt{u},$$

que l'on a

$$J=-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{i-1}(a_k r_k^{2}+r_k^{\cdot 2})^{2}\int_{z_k}^{z_{k+1}}u^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}z$$
$$=-\frac{1}{8}\sum_{0}^{i-1}(a_k r_k^{2}+r_k^{\cdot 2})^{2}\frac{1}{b_k}\left(\frac{z_{k+1}-m_k}{\sqrt{u_{k+1}}}-\frac{z_k-m_k}{\sqrt{u_k}}\right),$$

où nous avons affecté les quantités a et b de l'indice k.

2.3. Séparation des coefficients de l'iconal.

Il nous reste, pour une trajectoire générale de la forme

$$r = r_o g + r_{D'} h,$$

où g et h sont les trajectoires particulières pour lesquelles

$$g_o = 1, \qquad g_{D'} = 0, \qquad h_o = 0, \qquad h_{D'} = 1$$

à développer l'iconal E_{oi}, que nous venons de calculer selon les puissances de

$$a = r_o^2, \qquad b = 2 r_o r_{D'}, \qquad c = r_{D'}^2$$

et à déterminer les coefficients B définis plus haut.

On a, par exemple

$$r^2 = a g^2 + b g h + c h^2,$$

$$r \dot{r} = a g \dot{g} + \frac{1}{2} b (g \dot{h} + \dot{g} h) + c h \dot{h}.$$

Il en résulte, avec l'abréviation

$$K_k = \frac{1}{\sqrt{u_k}} (u''_{k,k+1} - u''_{k-1,k})$$

pour la première intégrale I, les contributions suivantes aux coefficients

$$B_{11} = \frac{1}{32} \left\{ \left(\frac{u'''}{\sqrt{u}} g^4 \right)_i - \left(\frac{u'''}{\sqrt{u}} \right)_o + \sum_{k \neq o, i} \left[K g^2 \left(\frac{u'}{2u} g^2 - \frac{4 g \dot{g}}{\sqrt{u}} \right) \right]_k \right\},$$

$$B_{22} = B_{13} = \frac{1}{32} \sum \left[K g h \left(\frac{u'}{2u} g h - 2 \frac{g \dot{h} + h \dot{g}}{\sqrt{u}} \right) \right]_k,$$

$$B_{33} = \frac{1}{32} \sum \left[K h^2 \left(\frac{u'}{2u} h^2 - 4 \frac{h \dot{h}}{\sqrt{u}} \right) \right]_k,$$

$$B_{12} = \frac{1}{32} \sum \left[K g^2 \left(\frac{u'}{2u} g h - \frac{3 \dot{g} h + g \dot{h}}{\sqrt{u}} \right) \right]_k,$$

$$B_{23} = \frac{1}{32} \sum \left[K h^2 \left(\frac{u'}{2u} g h - \frac{\dot{g} h + 3 g \dot{h}}{\sqrt{u}} \right) \right]_k.$$

Ces sommes sont à prendre à toutes les limites entre intervalles, à l'exception de o et i.

Les contributions de la seconde intégrale aux mêmes coefficients sont pour des distributions paraboliques de potentiel, avec l'abréviation

$$K_k = -\frac{1}{2 b_k} \left(\frac{z_{k+1} - m_k}{\sqrt{u_{k+1}}} - \frac{z_k - m_k}{\sqrt{u_k}} \right),$$

les suivantes :

$$B_{11} = \sum_{k=0}^{i-1} K_k (a g^2 + \dot{g}^2)_k^2,$$

$$B_{22} = \sum K_k (a g h + \dot{g} \dot{h})_k^2,$$

$$B_{33} = \sum K_k (a h^2 + \dot{h}^2)_k^2,$$

$$B_{12} = \sum K_k (a g^2 + \dot{g}^2)_k \; (a g h + \dot{g} \dot{h})_k,$$

$$B_{13} = \sum K_k (a g^2 + \dot{g}^2)_k \; (a h^2 + \dot{h}^2)_k,$$

$$B_{23} = \sum K_k (a g h + \dot{g} \dot{h})_k (a h^2 + \dot{h}^2)_k.$$

Pour un champ homogène, la constante est

$$K = \frac{1}{e_k} \left(\frac{1}{\sqrt{u_{k+1}}} - \frac{1}{\sqrt{u_k}} \right); \qquad e_k = \frac{u_{k+1} - u_k}{z_{k+1} - z_k}.$$

Pour un domaine où le potentiel est constant, elle est

$$K = -\frac{1}{2} \frac{z_{k+1} - z_k}{u_k^{\frac{3}{2}}},$$

tandis qu'il faut égaler à zéro la quantité a dans les expressions pour les coefficients B.

2.4. Exactitude de l'approximation.

Pour apprécier l'exactitude avec laquelle on obtient l'iconal du quatrième ordre, considérons d'abord l'intégrale J et calculons l'écart entre la valeur obtenue et la valeur réelle dans un intervalle lorsqu'on fait une petite erreur sur u'' et r dans cet intervalle. On a la variation

$$\Delta J = -\frac{1}{8} \Delta \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\frac{u''}{4} r^2 + \dot{r}^2 \right)^2 \frac{dt}{u}$$

$$\cong -\frac{1}{4} \left(\frac{u''}{4} r_k^2 + \dot{r}_k^2 \right) \times \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\frac{r^2}{4} \Delta u'' + \frac{u''}{2} r \Delta r + 2 \dot{r} \Delta \dot{r} \right) \frac{dt}{u}.$$

Cet écart a donc deux causes. D'abord u'' paraît directement dans la quantité à intégrer et n'est approchée que par des constantes successives. En outre, les grandeurs r et r' relatives à la trajectoire, qu'on introduit dans l'intégrale, ne sont obtenues qu'à partir d'un potentiel approché, de sorte qu'il faut compter avec des erreurs Δr_k et $\Delta \dot{r}_k$ au commencement de chaque intervalle. Or, nous avons, en raison de la constitution spéciale de nos formules de fonctions circulaires et hyperboliques, la relation

$$\frac{\overline{u''}}{2} r \Delta r + 2 \dot{r} \Delta \dot{r} = \frac{u''}{2} r_k \Delta r_k + 2 \dot{r}_k \Delta \dot{r}_k.$$

Nous négligeons ici les écarts de trajectoire qui

prennent naissance dans l'intervalle lui-même et nous obtenons ainsi pour l'erreur relative commise sur ces termes de J l'expression

$$2\,\frac{\frac{u''}{4}\,r_k\,\Delta r_k + \dot r_k\,\Delta \dot r_k}{\frac{u''}{4}\,r_k^2 + \dot r_k^{2}}$$

qui possède l'ordre de grandeur de l'erreur relative commise sur la trajectoire, c'est-à-dire l'erreur relative commise dans l'appréciation du potentiel.

Le terme contenant $\Delta u''$ peut encore être apprécié au moyen du théorème de la moyenne comme suit :

$$\int \frac{r^2}{4}\,\Delta u''\,\frac{\mathrm{d}z}{u\sqrt{u}} < |\Delta u''|_{\max} \int \frac{r^2}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}z.$$

Ici encore, on voit que si l'on rend plus fine la division en augmentant le nombre d'intervalles, la précision ne peut qu'être augmentée et la convergence du procédé est assurée.

La contribution à l'iconal provenant du terme I où u^{IV} a été éliminé par intégrations partielles successives se compose d'une intégrale qui également ne contient que r, r', u, u', u'' et s'obtient avec le même degré d'exactitude que l'expression que nous venons d'étudier en détail.

2.5. Cas du miroir électronique. Réduction des aberrations du troisième ordre dans un miroir.

Il est intéressant de se demander si, dans le cas du miroir électronique, on peut également calculer les aberrations en se contentant de connaître les dérivées du potentiel jusqu'à la seconde. Le calcul des aberrations pour le miroir a été fait par Recknagel [6] par la méthode des trajectoires. Partant des corrections d'ordre supérieur $\bar r$ et $\bar z$ à apporter à la trajectoire, telles qu'elles sont indiquées au paragraphe 1 *b*, il commence par trouver la valeur limite de $\bar z$ au point où l'électron rebrousse chemin, car l'expression pour $\bar z$ devient en ce point le produit indéterminé de $\sqrt{u}$ qui tend vers zéro, et d'une intégrale qui tend vers l'infini. Cette valeur limite est le quotient des dérivées par rapport au temps de l'intégrale et de la quantité $\frac{1}{\sqrt{u}}$. On trouve ainsi immédiatement pour le point de rebroussement

$$\bar z_R = \left[\frac{1}{u'}\left(\frac{r^2}{4}\,u'' + \dot r^2\right)\right]_{u=0}.$$

L'équation différentielle pour $\bar z$ donne alors en ce point

$$\dot{\bar z}_R = 0.$$

Au delà de ce point, on utilise la relation

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u'}{u}$$

et l'on écrit l'intégrale pour $\bar z$ sous la forme

$$\bar z_{t>t_R} = \bar z_R - \sqrt{u}\int_{t_R}^{t} \frac{1}{u'}\left(\frac{r^2}{4}\,u'' + \dot r^2\right)\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sqrt{u}}\right)\mathrm{d}t.$$

On intègre l'équation par parties et l'on obtient

$$\bar z_{t>t_R} = \left[\frac{1}{u'}\left(\frac{r^2}{4}\,u'' + \dot r^2\right)\right]^{t=t_R} - \sqrt{u}\int_{t_R}^{t} \frac{1}{u'^2}\left[(u'u''' - u''^2)\,\frac{r^2}{4} + u''\,\dot r^2\right]\mathrm{d}t,$$

car $\bar z_R$ et la valeur du premier crochet à la limite inférieure se compensent.

L'expression pour $\bar z$ est ensuite reportée dans l'intégrale pour $\bar r$ qui ne présente pas de point singulier.

L'examen de ces expressions montre qu'elles contiennent les troisième et quatrième dérivées du potentiel.

Si l'on intégrait par parties comme nous l'avons fait précédemment pour éliminer ces dérivées, on retrouverait des expressions sous le signe somme qui divergeraient au point de rebroussement.

Il est donc nécessaire de connaître les dérivées troisième et quatrième du potentiel pour calculer les aberrations du miroir électronique. L'hypothèse suivant laquelle les trajectoires n'ont pas de point de rebroussement est, par conséquent, indispensable pour le calcul des aberrations en approchant la dérivée seconde par des constantes successives comme nous l'avons fait.

Ceci a une raison profonde. En effet, le développement de l'iconal

$$E = \int n\,\mathrm{d}s = \int \sqrt{u}\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}\,\frac{u''}{u} + \ldots}\;\mathrm{d}s,$$

ds étant l'arc de trajectoire, selon les puissances croissantes de r, dont on considère les termes comme petits devant 1, n'a plus de sens dès que u devient nul, de sorte que l'iconal du quatrième ordre ne peut s'obtenir au départ. Il est, en effet, à remarquer que ce sont les expressions obtenues dans le développement originel de l'iconal qui divergent. L'iconal lui-même reste absolument fini. L'indice n, lié à la vitesse des électrons, passe comme celle-ci au voisi-

nage de zéro, de sorte qu'il n'y aurait aucune raison pour l'iconal de devenir infini. Il faut désormais calculer l'iconal complet en se servant de la trajectoire exacte et délimiter seulement ensuite la fraction qui est liée aux puissances quatrièmes des coordonnées de la trajectoire dans les plans objet et diaphragme pour obtenir les aberrations du troisième ordre.

Les expressions obtenues par la méthode des trajectoires par Recknagel montrent qu'une contribution importante aux aberrations est fournie par les termes contenant en facteur les dérivées supérieures du potentiel.

On peut donc affirmer qu'un moyen de réduire les aberrations du troisième ordre du miroir électronique est de placer la zone de rebroussement des électrons dans un champ homogène. On voit alors que $\ddot{r}$ devient nul tandis que $\ddot{z}$ ne dépend plus que de $\dot{r}$ à l'entrée, ce qui est naturel, les surfaces équipotentielles étant planes et perpendiculaires à l'axe, de sorte que la distance de l'axe où l'électron entre est indifférente, tandis que sa vitesse radiale ne varie pas.

Pour un champ homogène dans la zone de rebroussement des électrons, l'iconal se calcule comme suit. Soit

$$u = u_o\left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

l'allure du potentiel, qui part de la valeur u_o à l'entrée de cette zone, et tombe à zéro à une distance L. On a à l'entrée

$$u_o = \dot{r}_e^2 + \dot{z}_e^2.$$

La vitesse radiale demeure constante

$$\dot{r} \equiv \dot{r}_e.$$

L'équation de Newton pour la coordonnée z est

$$\ddot{z} = \frac{e}{m}\left(-\frac{d\Phi}{dz}\right) = \frac{e}{m}\frac{\Phi}{L} = -\frac{1}{2}\frac{u_o}{L},$$

d'où

$$\dot{z} = \dot{z}_e - \frac{1}{2}\frac{u_o}{L}t.$$

Au point de rebroussement, on a

$$\dot{z}_R = 0, \qquad t_R = \frac{2L}{u_o}\dot{z}_e.$$

Le temps de sortie est égal à deux fois le temps mis à atteindre le point de rebroussement

$$t_s = 2t_R = \frac{4L}{u_o}\dot{z}_e.$$

L'iconal s'écrit

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{t_s}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2)\,dt \\ &= \int_0^{t_s}\left(\dot{r}_e^2 + \dot{z}_e^2 - \dot{z}_e\frac{u_o}{L}t + \frac{1}{4}\frac{u_o^2}{L^2}t^2\right)dt \\ &= u_o t_s - \dot{z}_e\frac{u_o}{L}\frac{t_s^2}{2} + \frac{u_o^2}{4L^2}\frac{t_s^3}{3} \\ &= 4L\dot{z}_e\left(1 - \frac{2}{3}\frac{\dot{z}_e^2}{u_o}\right), \end{aligned}$$

en remplaçant t_s par sa valeur.

Dans cette expression, portons

$$\dot{z}_e = \sqrt{u_o - \dot{r}^2}.$$

Il vient

$$E = 4L\sqrt{u_o}\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{u_o}}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{\dot{r}^2}{u_o}\right),$$

u_o étant le potentiel à l'entrée. En développant cette expression suivant les puissances croissantes de $\dot{r}$ il vient

$$E = \frac{4}{3}L\sqrt{u_o}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{r}^2}{u_o} + \frac{1}{8}\frac{\dot{r}^4}{u_o^2}\right)\left(1 + 2\frac{\dot{r}^2}{u_o}\right)$$

et les termes du quatrième ordre en $\dot{r}$ sont

$$E_4 = -\frac{7}{6}L\sqrt{u_o}\frac{\dot{r}^4}{u_o^2}$$

qu'on développe suivant les solutions particulières g et h comme précédemment.

2.6. Extension du calcul complet de l'iconal au cas du champ magnétique.

a. L'EXPRESSION DE L'ICONAL. — Il est commode de se servir de l'abréviation

$$f = -\frac{e}{m}\mu_0 H(z),$$

où μ_0 est la perméabilité dans le vide et H la valeur du champ magnétique (présentant une symétrie de révolution) sur l'axe. On trouve pour la trajectoire paraxiale [7]

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{u'' + f^2}{4}w = 0; \qquad \psi(z) = \psi(z_0) + \frac{1}{2}\int \frac{f}{\sqrt{u}}\,dz;$$

où

$$w\,e^{i\psi} = v = x + iy.$$

Les termes du quatrième ordre sous le signe somme de l'iconal peuvent se mettre sous la forme

$$E_4 = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{\sqrt{u}}\left(u^{\text{IV}} - \frac{u''^2}{u}\right)\frac{(vv^*)^2}{4} - \frac{u''}{2\sqrt{u}}vv^*v'v'^* - \sqrt{u}(v'v'^*)^2\right] + \frac{f''}{4}\frac{vv^*}{4}\frac{v^*v' - vv'^*}{2i},$$

où l'astérisque placé au-dessus d'une lettre indique la quantité complexe conjuguée. Si l'on passe de la fonction v à la fonction w, on obtient

$$E_4 = -\int \Big\{ \frac{1}{32}\left[\frac{(u''+f^2)^2}{u} - u^{\text{IV}} - 4ff''\right]\frac{(ww^*)^2}{4} + \frac{u''+f^2}{8}\,\frac{ww^*w'w'^*}{2} + \frac{u}{2}\,\frac{(w'w'^*)^2}{4} + \frac{w^*w'-ww'^*}{2i} \times \left[\frac{f^2}{8}\,\frac{w^*w'-ww'^*}{2i} - \frac{\sqrt{u}}{16}\left(f''-f\frac{u''+f^2}{u}\right)ww^* + \sqrt{u}\,\frac{f}{4}\,w'w'^*\right]\Big\}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{u}}.$$

b. Calcul complet de l'intégrale. — Il convient d'essayer le même procédé d'approximation que précédemment. C'est dire que nous devons approcher u'' et f^2 par des constantes. La trajectoire w dans le plan de référence qui tourne avec l'électron le long de l'axe peut alors s'exprimer comme avant par des fonctions circulaires ou hyperboliques, et a la forme

$$w = w_o g + w_{D'} h,$$

où g et h sont les solutions réelles, normées comme par le passé, de l'équation paraxiale. On a donc à chaque endroit

$$\begin{aligned} ww^* &= w_o w_o^* g^2 + (w_o w_{D'}^* + w_o^* w_{D'})\,gh + w_{D'} w_{D'}^* h^2 \\ &= ag^2 + bgh + ch^2, \end{aligned}$$

exactement comme avant. De plus, on a

$$\frac{1}{2i}\begin{vmatrix} w^* & w \\ w'^* & w' \end{vmatrix} = \frac{1}{2i}(w^* w_{D'} - w_o w_{D'}^*)\begin{vmatrix} g & h \\ g' & h' \end{vmatrix} = d\sqrt{\frac{u}{u_o}}\,h'_o.$$

On voit que notre iconal est encore fonction de la grandeur

$$d = x_o y_{D'} - x_{D'} y_o$$

et s'énonce

$$E_{ol4} = \frac{1}{4}(B_{11}a^2 + B_{22}b^2 + B_{33}c^2 + 2B_{12}ab + 2B_{13}ac + 2B_{23}bc + 2B_{14}ad + 2B_{24}bd + 2B_{34}cd).$$

Le terme $B_{44}d^2$ n'y paraît pas, car

$$d^2 = ac - \frac{b^2}{4}.$$

Nous appelons

$$c_k = \frac{1}{4}\overline{(u''+f^2)}_{k,k+1}$$

une valeur moyenne du membre de droite dans l'intervalle (z_k, z_{k+1}) et nous trouvons, pour la trajectoire

$$\begin{pmatrix} w_{k+1} \\ w'_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\,\alpha & \dfrac{1}{\sqrt{|c|}}\begin{smallmatrix}\sin\\ \mathrm{sh}\end{smallmatrix}\,\alpha \\ \mp\sqrt{|c|}\begin{smallmatrix}\sin\\ \mathrm{sh}\end{smallmatrix}\,\alpha & \begin{smallmatrix}\cos\\ \mathrm{ch}\end{smallmatrix}\,\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_k \\ w'_k \end{pmatrix}$$

$$(c_k \gtrless 0),$$

$$\alpha_k = \sqrt{|c_k|}\,(t_{k+1} - t_k) = \sqrt{|c_k|}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{u}}.$$

On vérifie aisément que l'expression $(c_k ww^* + w'w'^*)$ reste également ici constante le long de la trajectoire, de sorte que, pour les termes de E_{ol4} qui en relèvent, on trouve

$$J = -\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{i-1}(cww^* + w'w'^*)_k^2\int_{z_k}^{z_{k+1}} u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z.$$

Le terme qui provient de u^{IV} peut se traiter de la même manière que précédemment, ce que nous ne répéterons pas ici.

De plus, nous admettrons que nous connaissons une valeur moyenne de la dérivée première de f pour chaque intervalle et nous exprimerons f'' par le saut que fait f' d'intervalle à intervalle. On obtient ainsi après intégration, par parties, pour le terme suivant de E_{ol4} :

$$\frac{1}{32}\int ff''\frac{(ww^*)^2}{\sqrt{u}}\,dz = \frac{1}{32}\sum_{k\neq o,i}(f'_{k,k+1} - f'_{k-1,k})\left[f\frac{(ww^*)^2}{\sqrt{u}}\right]^{z=z_k},$$

les termes qui restent encore donnent

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{8}\mathrm{d}^2 u_o h_o'^2\int f^2 u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{16}\mathrm{d}\sqrt{u_o}\,h'_o\int f''\frac{ww^*}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}z - \\ &-\frac{1}{4}\mathrm{d}\sqrt{u_o}\,h'_o\int(c_k ww^* + w'w'^*)^2 f u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z = \\ = &-\frac{1}{8}\mathrm{d}^2 u_o h_o'^2\sum_{k=0}^{i-1} f_{k,k+1}^2\int_{z_k}^{z_{k+1}} u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z + \\ &+\frac{1}{16}\mathrm{d}\sqrt{u_o}\,h'_o\sum_{k\neq o,i}(f'_{k,k+1} - f'_{k-1,k})\left(\frac{ww^*}{\sqrt{u}}\right)_k + \\ &-\frac{1}{4}\mathrm{d}\sqrt{u_o}\,h'_o\sum_{k=0}^{i-1}(cww^* + w'w'^*)_k f_{k,k+1}\int_{z_k}^{z_{k+1}} u^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Il est donc aussi possible pour le cas du champ magnétique de calculer d'une façon complète les intégrales donnant l'iconal. La séparation suivant les termes, qui donnent les différents coefficients de l'iconal se passe exactement comme dans le cas où

il n'y a pas de champ magnétique. Pour le cas particulier important où seul le champ magnétique varie, le potentiel étant constant, nous la donnerons explicitement dans les applications qui vont suivre.

2.7. Variation des coefficients de l'iconal avec les positions de l'objet et de la pupille.

Nous ne donnerons le calcul que pour le cas électrique, sans champ magnétique.

a. Relation entre E_{oi} et $E_{FF'}$. — Nous supposons connu l'iconal $E_{FF'}$ pris entre le foyer objet et le foyer image, en fonction des coordonnées x_F, y_F, $x_{F'}$, $y_{F'}$ du rayon dans ces deux plans

$$E_{FF'}(x_F, x_{F'}, y_F, y_{F'}) = C_0 + \frac{1}{2} C_2 \bar{b} + \frac{1}{4}(C_{11}\bar{a}^2 + C_{22}b^2 + C_{33}c^2 + 2\bar{a}bC_{12} + 2b\bar{c}C_{23} + 2\bar{a}\bar{c}C_{13}),$$

où l'on a

$$\bar{a} = x_F^2 + y_F^2, \qquad b = 2(x_F x_{F'} + y_F y_{F'}), \qquad \bar{c} = x_{F'}^2 + y_{F'}^2.$$

C'est-à-dire qu'on a calculé les coefficients C par la méthode directe.

Nous avons à calculer comment on passe de $E_{FF'}$ à

$$E_{oi} = E_{oF} + E_{FF'} + E_{F'i}$$

et à trouver les coefficients de E_{oi} dans le développement en fonction des nouvelles coordonnées x_o, y_o, $x_{D'}$, $y_{D'}$, du plan objet et du diaphragme de sortie. Nous avons d'abord, d'après les équations de Bruns :

$$-n\xi = C_2 x_{F'}, \qquad n'\xi' = C_2 x_F;$$

$$C_2 = C = \frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}.$$

où ξ, ξ', η, η' désignent les tangentes de l'angle que fait la trajectoire avec l'axe des z dans le plan de l'objet et dans le plan de l'image, et où C est le troisième terme de notre matrice. Le passage des variables x_F, $x_{F'}$, ... aux variables x_o, $x_{D'}$, ... est régi par les équations suivantes :

$$x_o = x_F - \frac{C}{n}(z_o - z_F)x_{F'} = x_F - \gamma x_{F'},$$

$$x_{D'} = \frac{C}{n}(z_{D'} - z_{F'})x_F - x_{F'} = -\beta x_F + x_{F'},$$

où les paramètres γ et β :

$$\gamma = \frac{z_o - z_F}{f}, \qquad \beta = \frac{z_{D'} - z_{F'}}{f'}$$

désignent les distances de l'objet et de la pupille de sortie à leurs plans focaux respectifs, distances mesurées à l'aide des distances focales respectives. Les anciennes coordonnées, exprimées en fonction des nouvelles, deviennent ainsi :

$$x_F = \frac{1}{\Delta}(x_o + \gamma x_{D'}), \qquad y_F = \frac{1}{\Delta}(y_o + \gamma y_{D'});$$

$$x_{F'} = \frac{1}{\Delta}(\beta x_o + x_{D'}), \qquad y_{F'} = \frac{1}{\Delta}(\beta y_o + y_{D'});$$

où

$$\Delta = 1 - \beta\gamma.$$

La quantité Δ n'est jamais nulle, car l'objet et la pupille de sortie ne peuvent se trouver en des points optiquement conjugués. Si tel était le cas, le faisceau de trajectoires ne serait pas limité et partant défini.

On obtient ainsi tout d'abord

$$A_2 = \frac{C}{\Delta},$$

puis ensuite

$$E_{oF} = \frac{n}{8}(z_o - z_F)(\xi^2 + \eta^2)^2 = \frac{n\gamma}{8f^3\Delta^4}(\beta^2 a + \beta b + c)^2$$

et

$$E_{F'i} = \frac{n'}{8}(z_{F'} - z_i)(\xi'^2 + \eta'^2)^2 = -\frac{n'}{8\gamma f^3\Delta^4}(a + \gamma b + \gamma^2 c^2),$$

car

$$(z_{F'} - z_i)(z_o - z_F) = -ff'.$$

Le calcul de E_{oi} à partir de $E_{FF'}$ et son expression en fonction des nouvelles coordonnées s'effectue désormais de lui-même et l'on en tire aisément les coefficients B de l'iconal cherché, qui sont donnés dans l'annexe.

Il suffit désormais, lorsqu'on a un système, de calculer l'iconal entre les deux plans focaux, ce qui correspond physiquement au cas où l'objet est au foyer et la pupille dans le plan focal image (éclairage parallèle). On en tire immédiatement les aberrations pour n'importe quelle position de l'objet et de la pupille.

b. Remarque sur la position de la pupille. — Lorsqu'on dispose de systèmes de lentilles, on est libre, en général, de choisir la position et la grandeur de la pupille qui limite le faisceau. C'est la tâche du condenseur. En revanche, lorsqu'on a un convertisseur d'images, la répartition des vitesses des électrons issus de l'objet est la même pour tous les points. Si le convertisseur a une photocathode plate, suivie d'un champ accélérateur homogène, jusqu'à l'entrée dans la lentille, la pupille d'entrée

se trouve à l'infini dans l'espace objet. En ce cas, on dispose seulement de l'ouverture du faisceau, et non de la position de la pupille, par rapport à la lentille.

Mais, on voit un moyen de placer la pupille où l'on veut par rapport à la lentille même dans le cas du convertisseur d'images. C'est de choisir la cathode sphérique et de donner au champ accélérateur la forme d'un champ de forces central, symétrique par rapport à un point, ce point étant le centre de la sphère. Les faisceaux d'électrons provenant de chaque point objet s'y croisent. La pupille d'entrée se trouve donc dans la région du centre de la sphère et l'on peut placer la lentille là ou plus près de la cathode. Cette lentille n'a d'ailleurs plus besoin d'être aussi forte qu'auparavant, en raison de la convergence qu'apporte déjà le domaine de potentiel sphérique.

Les rayons convergent désormais vers le centre de la lentille et y sont à la fois moins écartés de l'axe et moins déviés, ce qui explique la réduction des aberrations obtenue avec de telles dispositions.

c. Inversion du sens de marche des électrons. — Nous avons vu qu'une lentille est caractérisée d'une façon absolue, au point de vue de ses aberrations du troisième ordre, par les coefficients C_{mn} de l'iconal $E_{FF'}$. Si l'on permute espace objet et espace image, c'est-à-dire si l'on inverse le sens de marche de l'électron, celui-ci décrira dans un champ électrostatique de nouveau exactement la même trajectoire, l'iconal $E_{FF'}$ ne change pas de valeur. Seuls les plans focaux F et F' sont échangés entre eux. Si l'on examine l'expression de $E_{FF'}$ donnée dans le sous-paragraphe *b* ci-dessus, on voit que C_{22} et C_{13} restent inchangés, tandis que C_{11} et C_{33} permutent, de même que C_{12} et C_{23}. On a donc, si les astérisques désignent les nouveaux coefficients

$$C^*_{22} = C_{22}, \qquad C^*_{13} = C_{13}$$

et

$$C^*_{11} = C_{33} \qquad C^*_{33} = C_{11}, \qquad C^*_{12} = C_{23}, \qquad C^*_{23} = C_{12}.$$

On peut conclure de ces relations que, si l'on a une lentille symétrique, les coefficients suivants doivent être égaux entre eux

$$C_{11} = C_{33}, \qquad C_{12} = C_{23}.$$

Dans le cas d'un champ magnétique, on peut dire la même chose des six coefficients de l'iconal, qui correspondent à ceux du cas électrique. En effet, bien que la trajectoire de l'électron ne soit plus directement réversible, celui-ci décrit dans le plan méridien, qui tourne avec lui, la même courbe dans les deux sens, car l'équation paraxiale ne contient que le champ magnétique au carré et ne réagit, par conséquent, pas à son signe. Dans l'iconal lui-même, les termes qui participent aux six coefficients susdits ne contiennent également que f^2 ou ff'' et ne dépendent donc pas du sens de marche de l'électron.

En revanche, les trois derniers termes de l'iconal, qui donnent les aberrations magnétiques de torsion, changent seulement leur signe, pas leur grandeur absolue. On aura donc

$$C^*_{14} = -C_{34}, \qquad C^*_{34} = -C_{14}$$

et

$$C^*_{24} = C_{24}.$$

Pour une lentille magnétique symétrique, on aura

$$C^*_{14} = -C_{14}$$

et donc aussi

$$C_{14} = C_{34}.$$

En conclusion, on peut dire pour toute lentille électronique qu'il suffit de l'examiner d'un seul côté.

d. Les aberrations lorsque le système se compose de plusieurs systèmes connus. — Supposons qu'on connaisse les aberrations de chacun des systèmes partiels, ainsi que l'optique du premier ordre de chacun des systèmes et de l'ensemble. Le principe qui permet de dériver les aberrations du système composé des aberrations des systèmes individuels est le suivant.

Soit *ok* l'indice qui désigne l'objet tel qu'il apparaît au $k^{ième}$ élément de lentille après le passage des rayons dans les $k-1$ éléments précédents. On connaît l'aberration due au $k^{ième}$ élément de lentille, réduite à son espace objet

$$\Delta x_{ok} = f_k(x_{ok}, x_{p'k}, \ldots),$$

où $x_{p'k}$ est la coordonnée de la trajectoire dans la pupille de sortie telle qu'elle apparaît à l'élément k.

Les aberrations du système total se composent maintenant uniquement de la somme des aberrations dues aux systèmes partiels, ramenées dans l'espace objet de l'ensemble à l'aide des grandissements voulus, qu'on tire de l'optique du premier ordre. En effet, comme le calcul ne livre en optique électronique que les aberrations du troisième ordre, on peut les superposer individuellement et négliger l'erreur commise sur l'aberration due à un élément de lentille, lorsqu'on en forme l'image dans le plan

image définitif au moyen des éléments de lentille subséquents.

On aura donc

$$\Delta x_o = \sum_k \frac{x_o}{x_{ok}} \Delta x_{ok}$$
$$= \sum_k \frac{x_o}{x_{ok}} f_k\left(x_o \frac{x_{ok}}{x_o}, x_{p'} \frac{x_{p'k}}{x_{p'}}, \dots \right) = F(x_o, x_{p'}, \dots),$$

où les grandissements $\frac{x_{ok}}{x_o}$, $\frac{x_{p'k}}{x_{p'}}$ des objets et pupilles respectives se tirent des éléments de l'optique du premier ordre.

2.8. **Systèmes cylindriques. Impossibilité d'éliminer l'aberration de sphéricité par l'usage de lentilles cylindriques.**

Nous avons jusqu'ici traité uniquement des systèmes à symétrie de révolution. Les systèmes cylindriques (toutes les dérivées par rapport à x, par exemple, sont identiquement nulles) possédant un plan de symétrie xz peuvent se traiter de la même manière. Le développement en série du potentiel aux environs du plan de symétrie est

$$\varphi(y, z) = \Phi(z) - \frac{1}{2} y^2 \Phi'' + \frac{1}{24} y^4 \Phi^{\text{IV}} - \dots$$

et l'équation des trajectoires paraxiales, qui demeurent dans un plan, est

$$2uy'' + u'y' + u''y = 0.$$

On peut démontrer qu'on obtient la trajectoire paraxiale avec le même degré d'exactitude que dans le cas de la symétrie de révolution lorsqu'on approche le potentiel par des fonctions connues. Les déviations du troisième ordre de la dioptrique de Gauss dans le plan yz se définissent d'une manière analogue et on peut les calculer avec le même procédé d'approximation que celui que nous avons décrit. L'iconal s'écrit désormais

$$E_4 = \frac{1}{8} \int \left[\frac{1}{6} \frac{u^{\text{IV}}}{u} y^4 - \left(y'^2 + \frac{u''}{2u} y^2 \right)^2 \right] \sqrt{u}\, \mathrm{d}z.$$

Le pouvoir séparateur du microscope électronique est aujourd'hui limité en première ligne par l'aberration de sphéricité. Or, Scherzer [8] a montré que dans les systèmes à symétrie de révolution cette aberration ne peut pas être éliminée. Dans un autre travail [9], il a montré que si l'on abandonnait la symétrie de révolution, on pourrait corriger l'aberration de sphéricité pour les trajectoires se trouvant dans certains plans passant par l'axe tandis que cette aberration augmenterait pour d'autres plans passant par l'axe.

C'est dans cet ordre d'idées qu'il paraît intéressant d'examiner les aberrations des systèmes cylindriques, afin de voir si déjà un système cylindrique peut être construit de manière à être exempt d'aberration dite sphérique. Si cette aberration est absente pour les trajectoires qui nous intéressent, c'est-à-dire celles qui se trouvent dans un plan perpendiculaire aux génératrices, le système forme l'image d'un point sur un élément de droite. Si l'on renonce à former des images stigmatiques, on peut encore, avec un tel système, séparer deux points voisins, qui apparaîtront sous forme de deux lignes parallèles, si toutefois il ne se trouvent pas placés parallèlement aux génératrices ou à l'axe. En tournant l'objet examiné dans un plan perpendiculaire à l'axe, on peut, d'ailleurs, se faire une idée de la forme de cet objet.

Or, l'examen de l'iconal dérivé ci-dessus permet de démontrer qu'on ne peut pas construire de lentilles cylindriques exemptes d'aberration sphérique. En effet, suivons le même chemin que Scherzer dans le calcul qu'il fît pour montrer l'impossibilité de corriger l'aberration sphérique dans les systèmes à symétrie de révolution et éliminons par intégrations successives u^{IV} et autant que possible u'' de l'iconal. On obtient, si l'on fait abstraction de termes aux limites, qui ne fournissent aucune contribution à l'aberration susdite quand l'objet et l'image se trouvent dans un espace à potentiel constant, l'expression

$$E_4 = -\frac{1}{8} \int \left(\frac{2}{3} \frac{u''^2}{u^2} + \frac{5}{24} \frac{u'^4}{u^4} + \frac{7}{6} \frac{u'^3}{u^3} \frac{y'}{y} - \frac{3}{2} \frac{u'^2 y'^2}{u^2 y^2} \right) y^4 \sqrt{u}\, \mathrm{d}z,$$

où la quantité à intégrer peut se mettre sous la forme d'un carré parfait

$$E_4 = -\frac{1}{8} \int \left[\frac{2}{3} \left(\frac{u''}{u} + \frac{3}{2} \frac{u'y'}{uy} - \frac{3}{4} \frac{u'^2}{u^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{u'^4}{u^4} \right] y^4 \sqrt{u}\, \mathrm{d}z.$$

Ce carré ne pouvant devenir négatif ou nul, le caractère inévitable de l'aberration de sphéricité pour les systèmes cylindriques est démontré.

On voit donc qu'une optique non de révolution où l'aberration sphérique serait corrigée dans certains plans ne peut avoir la forme d'une lentille uniquement cylindrique. Dans la formation de l'image, l'aberration de sphéricité est inévitable. Une optique destinée à corriger cette aberration ne peut donc avoir que le caractère d'une optique supplémentaire correctrice dont les éléments du premier ordre

sont utilisés dans certains plans à ramener vers leur position idéale, les rayons plus écartés de l'axe concourant à l'aberration dans la grande lentille. Il en résulte que la correction ne peut avoir lieu que pour une seule inclinaison des rayons à corriger sur l'axe et pas pour l'ensemble des rayons se trouvant dans une certaine ouverture.

3. APPLICATIONS.

3.1. Lentille magnétique.

a. Relations lorsque le potentiel électrique reste constant. — Considérons une lentille purement magnétique, où le potentiel électrique soit partout le même. Pour ce cas important, les relations dérivées dans le paragraphe 2.7 se simplifient de la façon suivante :

Pour l'intervalle k, on aura

$$c_k = \frac{1}{4} f^2_{k,k+1} > 0,$$

puisque le potentiel électrique ne varie plus. Comme cette quantité est toujours positive, on n'aura pour les trajectoires que des fonctions circulaires. De plus, il vient

$$\alpha_k = f_{k,k+1}(z_{k+1} - z_k)\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Avec les abréviations

$$\frac{f_{k,k+1}}{f_m} = \bar{y}_k, \qquad \frac{z}{l} = x,$$

où f_m désigne le maximum de f et l désigne une longueur de comparaison, on obtient

$$\alpha_k = \alpha_o \bar{y}_k (x_{k+1} - x_k), \qquad \alpha_o = f_m l \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

Il est commode de remplacer partout les dérivées par rapport au temps par des dérivées par rapport à l'espace. On trouve alors pour les trajectoires, les relations suivantes entre grandeurs dépourvues de dimensions physiques

$$\begin{pmatrix} \dfrac{w_{k+1}}{l} \\ \dfrac{w'_{k+1}}{\alpha_o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_k & \dfrac{1}{\bar{y}_k}\sin\alpha_k \\ -\bar{y}_k \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{w_k}{l} \\ \dfrac{w'_k}{\alpha_o} \end{pmatrix},$$

où la quantité réelle w désigne désormais la distance de l'électron à l'axe. Si on pose $\frac{w}{l} = 1$ et $w' = 0$ dans le plan objet ou dans le plan du diaphragme (pupille) de sortie, on obtient respectivement les deux trajectoires particulières

$$g = \frac{w_g}{l}, \qquad h = \frac{w_h}{l}.$$

La combinaison linéaire de ces deux solutions particulières

$$w = \frac{1}{l}(r_o w_g + r_{B'} w_h)$$

donne alors la trajectoire générale. On vérifie encore la relation

$$h'_o = \frac{1}{l} w'_h(z_o).$$

Pour le calcul de l'iconal, il est pratique d'introduire la dérivée par rapport à la quantité sans dimensions x, qui sera indiquée par le signe « croix »

$$(^+) = \frac{d}{dx} = l\frac{d}{dz}.$$

On obtient alors sans difficulté l'iconal E_{oi}, dont l'expression est donnée dans l'annexe II. La décomposition suivant les puissances de a, b, c, d et les formules des coefficients C y sont également indiquées.

b. Exemple pratique. — Noux choisissons le champ magnétique étudié par Glaser [10] :

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

et nous l'approchons par la fonction en escalier donnée dans le tableau I :

Tableau I.

L_k........	3	1	0,5	1	0,5	1	3
$\bar{y}_k$........	0,1	0,3	0,65	0,95	0,65	0,3	0,1
y_k........	0	0,2	0,5	0,8	0,8	0,5	0,2

Il est remarquable de constater comment les éléments du premier ordre donnant l'optique gaussienne sont déjà bien rendus avec cette approximation grossière. Le tableau de valeurs suivant contient la convergence et l'abscisse du foyer calculés pour les cas d'une faible, d'une moyenne et d'une forte lentille. (Nous avons laissé de côté le cas où le foyer tombe dans le domaine où le champ magnétique existe.) Les résultats exacts de Glaser sont ajoutés à côté des nôtres, entre parenthèses dans le tableau II; la précision pour l'optique du premier ordre est, comme on le voit dans les limites de 2 %.

TABLEAU II.

$\alpha_0 \equiv k$ (Glaser)	0,1	0,25	0,33
$\dfrac{l}{f'}$	0,0157 (0,0157)	0,0914 (0,0932)	0,1594 (0,161)
x_F	64,1 (63,5)	10,68 (10,53)	6,18 (6,31)
$\dfrac{C_s}{l}$	4,8.10⁴ (6,4.10⁴)	250 (300)	52 (67)

Le tableau ci-dessus contient également le coefficient d'aberration sphérique $\frac{C_s}{l}$ dans le cas de forts grossissements (objet situé près du foyer objet). Elle est définie comme suit :

$$\Delta r_o = C_S \xi^3.$$

On la ramène aux grandeurs que nous avons calculées à l'aide des relations suivantes :

$$\Delta r_o = \frac{C_{33}}{C} r_{F'}^3, \qquad C = -\frac{\sqrt{u}}{f'}, \qquad r_{F'} = f' \xi$$

qui donnent

$$\frac{C_S}{l} = \frac{Z_{33}}{2\alpha_o^2} \left(\frac{w'_{gs}}{\alpha_o}\right)^{-4}.$$

Comme le montre notre tableau, l'aberration sphérique est donnée, dans le grand domaine de valeurs 5.10^4 à 50, avec son ordre de grandeur exact et une valeur bien approchée.

Pour finir, nous avons encore calculé toutes les

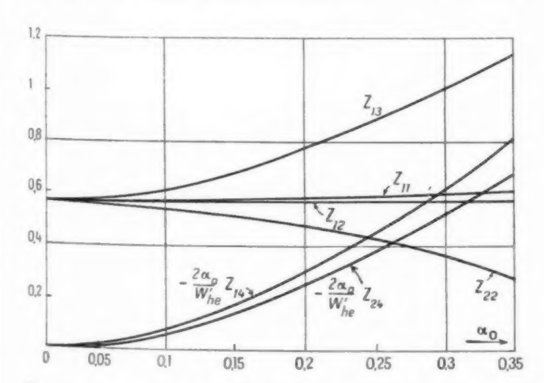


Fig. 4. — Aberrations de la lentille magnétique symétrique en fonction de sa puissance.

autres aberrations de la lentille magnétique symétrique. La figure 4 donne la courbe de variation de tous les coefficients Z_{mn} en fonction de la puissance α_o de la lentille, de sorte qu'on peut aisément déterminer chaque aberration du troisième ordre.

3.2. La lentille électrostatique à immersion.

Nous examinons la lentille formée par deux cylindres circulaires droits de diamètres égaux D, placés bout à bout et portés à deux potentiels différents. Le potentiel le long de l'axe est, d'après le livre de Zworykin ([11], p. 450) :

$$u = \frac{u_i + u_o}{2} + \frac{u_i - u_o}{2} \operatorname{th} 2,63 \frac{z}{D}.$$

Nous approcherons cette distribution de potentiel par deux paraboles de courbure égale, mais de

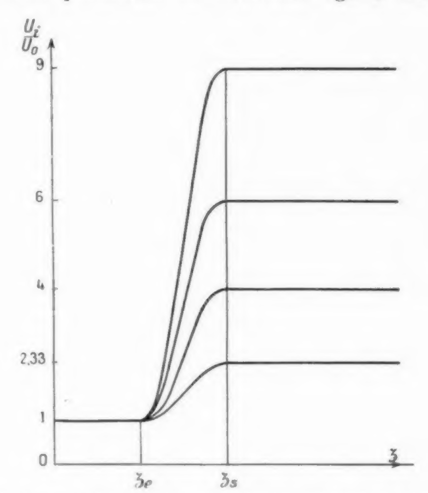


Fig. 5. — Distribution du potentiel dans des lentilles à immersion de puissances différentes.

dérivées secondes opposées, se raccordant avec une pente égale, et placées entre deux régions de potentiel constant, ainsi qu'il est montré à la figure 5.

Appelons z_1, z_2, z_3 le début, le milieu et la fin du domaine où le potentiel varie. On a

$$u'' = \pm \frac{1}{4} \frac{u_i - u_o}{L^2}, \qquad L = z_3 - z_1,$$

où L peut être considéré comme l'épaisseur de la lentille. En égalant les pentes des deux courbes au milieu de la lentille, on trouve la relation

$$L = 1,52 D$$

qui fixe l'épaisseur de la lentille équivalente pour un diamètre de cylindres D.

La relation donnant les trajectoires s'écrira le plus commodément à l'aide de grandeurs sans dimensions physiques

$$\begin{pmatrix} \dfrac{r_{k+1}}{L} \\ \dfrac{r'_{k+1}}{\sqrt{u_i - u_o}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\cos\\ \text{ch}\end{matrix}\alpha_k & \begin{matrix}\sin\\ \text{sh}\end{matrix}\alpha_k \\ -\begin{matrix}\sin\\ \text{sh}\end{matrix}\alpha_k & \begin{matrix}\cos\\ \text{ch}\end{matrix}\alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{r_k}{L} \\ \dfrac{r'_k}{\sqrt{u_i - u_o}} \end{pmatrix},$$

où l'on aura

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{u_i - u_o}{2 u_o}}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{u_i - u_o}{2 u_i}}.$$

Pour $\frac{r_1}{L} = 1$, $r'_1 = 0$, ce qui correspond à la trajectoire particulière que nous avions désignée par g, on trouve à la sortie de la lentille

$$\frac{r_{3g}}{L} = \operatorname{ch} \alpha_2 \cos \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_2 \sin \alpha_1,$$

$$\frac{r'_{3g}}{\sqrt{u_i - u_o}} = \operatorname{sh} \alpha_2 \cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_2 \sin \alpha_1.$$

De même pour $\frac{r_3}{L} = 1$, $r'_3 = 0$, ce qui correspond à la trajectoire particulière h, on trouve

$$\frac{r_{1h}}{L} = \operatorname{ch} \alpha_2 \cos \alpha_1 + \operatorname{sh} \alpha_2 \sin \alpha_1, \qquad r'_{1h} = - r'_{3g}.$$

Ces trajectoires ont été calculées et sont représentées sur la figure 6.

Les distances focales se trouvent au moyen du coefficient C de notre matrice originale, qui est

$$C = \left(\frac{r'_s}{r_e}\right)_{r'_e = 0} = - \frac{r'_{1h}}{L},$$

d'où l'on tire

$$f = \frac{\sqrt{u_o}}{C}, \qquad f' = - \frac{\sqrt{u_i}}{C}.$$

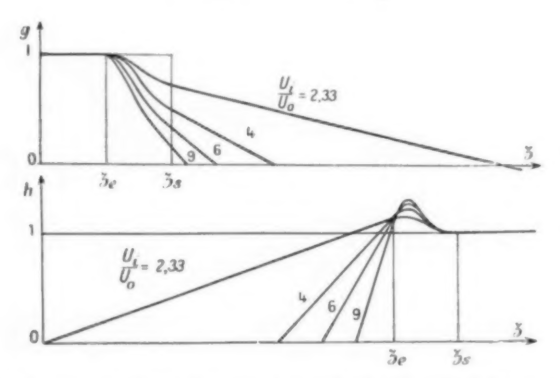


Fig. 6. — Lentille à immersion, trajectoires particulières g et h parallèles à l'axe dans l'espace au potentiel inférieur et supérieur respectivement.

La position des foyers par rapport à la lentille est donnée par les relations

$$z_1 - z_F = r_{1h} \frac{\sqrt{u_o}}{r'_{1h}}, \qquad z_{F'} - z_3 = r_{3g} \frac{\sqrt{u_i}}{r'_{3g}}.$$

Les quantités $\frac{L}{f}$, $\frac{L}{f'}$, $\frac{L}{z_F - z_e}$, $\frac{L}{z_{F'} - z_s}$, donnant tous les éléments de l'optique du premier ordre sont représentées à la figure 7, en fonction du rapport des tensions.

Dans le livre de Zworykin et ses collaborateurs,

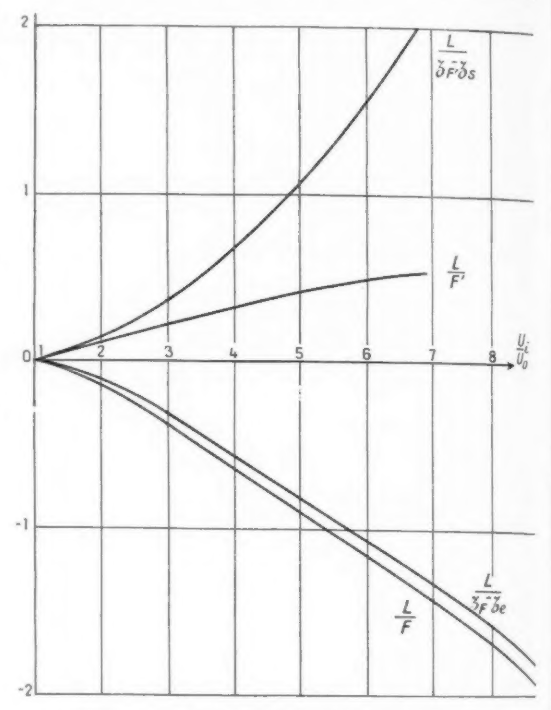


Fig. 7. — Lentille à immersion, convergences et position des foyers en fonction du rapport des tensions.

on trouve à la page 450, figure 13-21, les distances focales et les distances des foyers au milieu de la lentille représentées, en fonction du rapport des tensions. Dans le tableau III ci-dessous, nous avons reporté pour trois rapports de tension différentes les grandeurs $\frac{z_F - z_P}{D}$ et $\frac{z_F - z_2}{D}$ calculées par nous et qui sont identiques aux quantités $\frac{f_1}{D}$ et $\frac{z_1}{D}$ de Zworykin, afin de pouvoir les comparer directement avec les courbes de Zworykin.

Tableau III.

$\frac{u_i}{u_o}$.	$\frac{z_F - z_P}{D}$.	$\frac{z_F - z_2}{D}$.	$\frac{C_{33}}{C} D^2$.	$\frac{S_{33}}{M} D^2$.	$\frac{C_{11}}{C} D^2$.	$\frac{S_{11}}{M} D^2$.
1......	∞	∞	2,15	2,15	2,15	2,15
2,33...	-6,91	-8,64	3,48	3,3	1,56	1,45
4......	-2,31	-3,4	4,8	4,6	1,44	1,2
9......	-0,785	-1,585	8,0	6,8	1,7	0,9

La comparaison avec la figure de Zworykin

montre que nos éléments du premier ordre sont identiques aux siens, à la précision de lecture de la figure près.

En ce qui concerne les aberrations, on trouve à la page 613 du même ouvrage le coefficient d'aberration de sphéricité $\frac{S_8}{M}$ de Ramberg [12] obtenu par intégrations numériques des expressions, qui servirent de base à notre méthode de calcul approché. On peut ainsi comparer directement les expressions données par notre calcul et celles qu'on aurait obtenues par intégration graphique et numérique directe et exacte. Le tableau III ci-dessus contient également les résultats de Ramberg $\frac{S_{81}}{M}$ et $\frac{S_{82}}{M}$ pour la lentille accélératrice ($u_i > u_o$) et la lentille décélératrice ($u_i < u_o$), qui sont identiques aux coefficients $\frac{C_{33}}{C}$ et $\frac{C_{11}}{C}$ obtenus par notre calcul et qui sont également reportés dans le tableau III. La figure 8 représente $\frac{C_{11}}{C}$ et $\frac{C_{33}}{C}$ obtenus par notre calcul, en fonction du rapport de tension. Les croix sont les points de Ramberg. On voit que notre approximation est excellente dans le grand domaine de tensions $\frac{u_i}{u_o} = 1$ à 4. Si l'on désire des valeurs plus précises pour des lentilles plus fortes, on voit qu'il faudra simplement prendre plus de deux arcs de parabole pour approcher la courbe de potentiel.

Forts de cette confirmation, nous avons calculé toutes les autres aberrations du troisième ordre. Le calcul des six coefficients C_{mn} des aberrations s'effectue exactement comme nous l'avons décrit. Nous ne répéterons pas les calculs ici, et nous nous contenterons d'en donner les résultats à la figure 8, où les grandeurs

$$Z_{mn} = -4L^3\left(\frac{u_i - u_o}{u_o}\right)^{-2}\frac{C_{mn}}{\sqrt{u_o}}$$

sont représentées en fonction de $\frac{u_i}{u_o}$. Cette figure permet donc de calculer toutes les aberrations de la lentille à immersion. Pour une lentille devenant de plus en plus faible, le rapport des tensions tend vers 1 et un passage à la limite montre que les grandeurs Z_{mn} tendent toutes vers la valeur 5. C'est par erreur que dans notre thèse, les mêmes courbes ont été tracées à partir du point $\frac{u_i}{u_o} = 0$ qui n'a pas de sens. On voit aussi que lorsque $\frac{u_i}{u_o}$ tend vers 1, les coefficients C_{mn} tendent vers zéro. C'est également par erreur que dans notre thèse, l'exposant de $\frac{u_i - u_o}{u_o}$ dans la formule pour Z_{mn} est 2 au lieu de — 2 comme cela devrait être. Nous nous en excusons et profitons de l'occasion qui nous est donnée ici pour faire la rectification. La figure 9

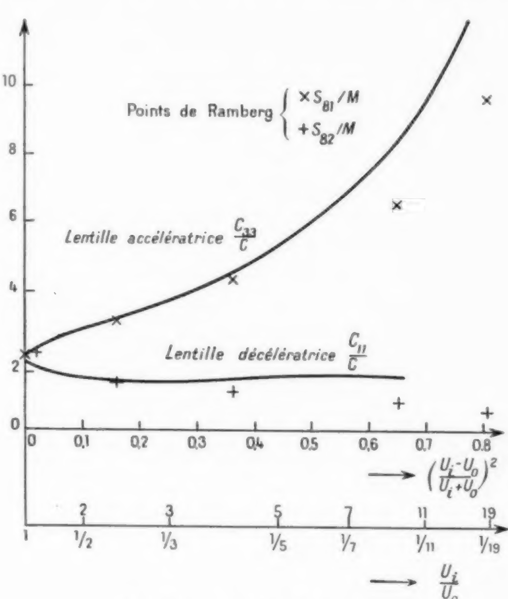


Fig. 8. — Lentille à immersion; aberration sphérique avec les points de Ramberg.

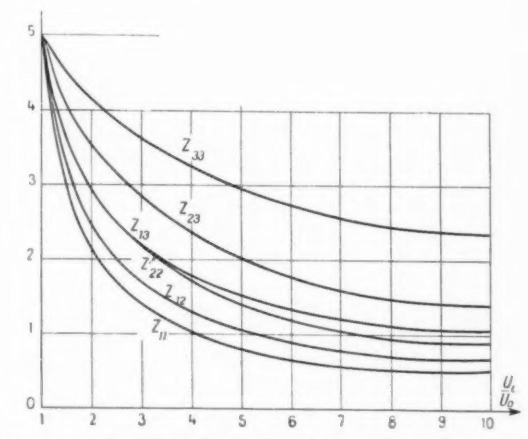


Fig. 9. — Lentille à immersion; les grandeurs donnant les aberrations du troisième ordre, en fonction du rapport des tensions.

représente les grandeurs Z_{mn} donnant les aberrations, en fonction du rapport de tension. On peut donc, désormais, trouver à l'aide de ces courbes toutes les aberrations du troisième ordre de la lentille à immersion.

CONCLUSION.

L'étude exécutée a permis de trouver des formules complètes permettant de déterminer les aberrations du troisième ordre en optique électronique, sans avoir besoin de résoudre des équations différentielles et des intégrales. Les formules sont approchées mais commodes. Les exemples ont montré qu'on trouvait déjà les aberrations à 20 ou 30 % près en se contentant d'approximations grossières pour le potentiel sur l'axe. La plupart du temps, on ne s'intéresse, d'ailleurs, qu'à l'ordre de grandeur de l'aberration.

Alors qu'en optique lumineuse, on construit depuis longtemps les instruments en se basant sur les aberrations, on se contente en optique électronique dans la plupart des cas de disposer les éléments du premier ordre, soit grandeur et position de l'image. L'auteur espère que son travail contribuera à faciliter l'étude des aberrations pour la construction des instruments d'optique électronique.

ANNEXE I.

Relations donnant les coefficients B de l'iconal E_{oi} en fonction des coefficients C de l'iconal $E_{FF'}$ et de la position de l'objet et de la pupille.

$$\Delta^4 B_{11} = \frac{n\gamma}{2f^3}\beta^4 - \frac{n'}{2f'^3}\frac{1}{\gamma} + C_{11} + C_{22}\,4\beta^2 + C_{33}\beta^4 + 4C_{12}\beta + 4C_{23}\beta^3 + 2C_{13}\beta^2,$$

$$\Delta^4 B_{22} = \frac{n\gamma}{2f^3}\beta^2 - \frac{n'}{2f'^3}\gamma + C_{11}\gamma^2 + C_{22}(1+\beta\gamma)^2 + C_{33}\beta^2 + 2C_{12}\gamma(1+\beta\gamma) + 2C_{23}\beta(1+\beta\gamma) + 2C_{13}\beta\gamma,$$

$$\Delta^4 B_{33} = \frac{n\gamma}{2f^3} - \frac{n'}{2f'^3}\gamma^3 + C_{11}\gamma^4 + 4C_{22}\gamma^2 + C_{33} + 4C_{12}\gamma^3 + 4C_{23}\gamma + 2C_{13}\gamma^2,$$

$$\Delta^4 B_{12} = \frac{n\gamma}{2f^3}\beta^3 - \frac{n'}{2f'^3} + C_{11}\gamma + C_{22}\,2\beta(1+\beta\gamma) + C_{33}\beta^3 + C_{12}(1+3\beta\gamma) + C_{23}(3\beta^2+\beta^3\gamma) + C_{13}\beta(1+\beta\gamma),$$

$$\Delta^4 B_{23} = \frac{n\gamma}{2f^3}\beta - \frac{n'}{2f'^3}\gamma^2 + C_{11}\gamma^3 + C_{22}\,2\gamma(1+\beta\gamma) + C_{33}\beta + C_{12}\gamma^2(3+\beta\gamma) + C_{23}(1+3\beta\gamma) + C_{13}\gamma(1+\beta\gamma),$$

$$\Delta^4 B_{13} = \frac{n\gamma}{2f^3}\beta^2 - \frac{n'}{2f'^3}\gamma + C_{11}\gamma^2 + C_{22}\,4\beta\gamma + C_{33}\beta^2 + C_{12}\,2\gamma(1+\beta\gamma) + C_{23}\,2\beta(1+\beta\gamma) + C_{13}(1+\beta^2\gamma^2).$$

ANNEXE II.

Expressions de l'iconal et de ses coefficients dans le cas d'une lentille purement magnétique.

Les termes du quatrième ordre de l'iconal pris entre l'objet et l'image, dans le cas où seul le champ magnétique varie, le potentiel électrique étant constant, sont les suivants :

$$E_{oi} = -\frac{l\sqrt{u}}{8}\Bigg\{(x_e - x_o)w'^4(z_o) + \alpha_o^4\sum_e^{s-1}\left(\frac{\bar{y}^2 w^2}{l^2} + \frac{w'^2}{\alpha_o^2}\right)_k^2 L_k + (x_i - x_s)w'^4(z_i) - \alpha_o^2\sum_e^{s}\frac{(y\,\Delta y^+ w^4)_k}{l^4} + 4\alpha_o^2 w_h'^2(z_o)\,Y^2\frac{d^2}{l^4} - \alpha_o w_h'(z_o) \times\left[\sum_e^{s}\Delta y_k^+\frac{w_k^2}{l^2} - 4\alpha_o^2\sum_e^{s-1}\left(\frac{\bar{y}^2 w^2}{l^2} + \frac{w'^2}{\alpha_o^2}\right)_k y_k L_k\right]\frac{d}{l^2}\Bigg\}.$$

Dans cette expression, nous avons fait usage des abréviations

$$L_k = x_{k+1} - x_k, \qquad y_k = y(z_k), \qquad \bar{y}_k = \overline{y(z)}$$
$$\text{pour} \quad z_k < z < z_{k+1},$$

$$Y^2 = \sum_e^{s-1} y_k^2 L_k, \qquad \Delta y_k^+ = y^+_{k,k+1} - y^+_{k-1,k},$$

où e et s indiquent comme par le passé entrée et sortie du domaine où le champ existe. On remarquera que la quantité entre accolades est sans dimensions. Pour la décomposition selon les puissances de a, b, c, d, il faut considérer que

$$\frac{w^2}{l^2} = \frac{1}{l^2}(ag^2 + bgh + ch^2),$$

$$\left(\frac{w'}{\alpha_o}\right)^2 = \frac{1}{l^2\alpha_o^2}(aw_g'^2 + bw_g'w_h' + cw_h'^2).$$

Nous trouvons ainsi les coefficients C_{mn} de l'iconal $E_{FF'}$. Pour simplifier l'écriture, nous donnerons les expressions des quantités

$$Z_{mn} = -2l^3 C_{mn}\frac{1}{\sqrt{u}\,\alpha_o^2}.$$

On trouve ainsi

$$Z_{11} = \alpha_o^2 \sum_{k=e}^{s-1} \left(\bar{y}^2 g^2 + \frac{w_g'^2}{\alpha_o^2} \right)_k^2 L_k - \sum_e^s (y \Delta y^+ g^4)_k + \alpha_o^2 \left(\frac{w'_{gs}}{\alpha_o} \right)^4 (x_{F'} - x_s),$$

$$Z_{22} = \alpha_o^2 \sum_e^{s-1} \left(\bar{y}^2 gh + \frac{w'_g w'_h}{\alpha_o^2} \right)_k^2 L_k - \sum_e^s (y \Delta y^+ g^2 h^2)_k - w'_k(z_F) Y^2,$$

$$Z_{12} = \alpha_o^2 \sum_e^{s-1} \left(\bar{y}^2 g^2 + \frac{w_g'^2}{\alpha_o^2} \right)_k \left(\bar{y}^2 gh + \frac{w'_g w'_h}{\alpha_o^2} \right)_k L_k - \sum_e^s (y \Delta y^+ g^3 h)_k,$$

$$Z_{13} = \alpha_o^2 \sum_e^{s-1} \left(\bar{y}^2 g^2 + \frac{w_g'^2}{\alpha_o^2} \right)_k \left(\bar{y}^2 h^2 + \frac{w_h'^2}{\alpha_o^2} \right)_k L_k - \sum_e^s (y \Delta y^+ g^2 h^2)_k + 2 w'_h(z_e) Y^2$$

et, en outre

$$Z_{14} = -\frac{1}{2} \frac{w'_h(z_e)}{\alpha_0} \times \left\{ \sum_e^s (\Delta y^+ g^2)_k - 4\alpha_o^2 \sum_e^{s-1} \left(\bar{y}^2 g^2 + \frac{w_g'^2}{\alpha_o^2} \right)_k \bar{y}_k L_k \right\},$$

$$Z_{24} = -\frac{1}{2} \frac{w'_h(z_e)}{\alpha_0} \times \left\{ \sum_e^s (\Delta y^+ gh)_k - 4\alpha_o^2 \sum_e^{s-1} \left(\bar{y}^2 gh + \frac{w'_g w'_h}{\alpha_o^2} \right)_k \bar{y}_k L_k \right\}.$$

Nous n'avons pas donné C_{33}, C_{23}, C_{34} parce que, dans l'exemple de la lentille symétrique que nous traitons ils sont égaux à C_{11}, C_{13}, C_{14} respectivement.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Picht, *Einführung in die Theorie der Elektronenoptik*, Barth, Leipzig, 1939, p. 110.

[2] E. Madelung, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, Dover Pub., New-York, 1943, p. 177 et 183.

[3] M. Herzberger, *Strahlenoptik*, Springer, Berlin, 1931.

[4] W. Glaser, *Elektronenbewegung als optisches Problem, Beiträge zur Elektronen optik, herausgegeben von H. Busch und E. Bruche*, Barth, Leipzig, 1937, p. 24 et *Z. tech. Physik*, t. 17, 1936, p. 617.

[5] O. Scherzer, *Berechnung der Bildfehler nach der Bahnmethode, Beiträge zur Elektronenoptik*, p. 33.

[6] A. Recknagel, *Zur Theorie des Elektronenspiegels* (*Z. Physik*, t. 104, 1937, p. 381).

[7] W. Glaser, *Zur Bildfehlertheorie des Elektronenmikroskops* (*Z. Physik*, t. 97, 1935, p. 177).

[8] O. Scherzer, *Ueber einige Fehler von Elektronenlinsen* (*Z. Physik*, t. 101, 1936, p. 593).

[9] O. Scherzer, *Sphärisch und chromatische Korrektur von Elektronenlinsen* (*Optik*, t. 2, 1947, p. 114).

[10] W. Glaser, *Strenge Berechnung magnetischer Linsen* (*Z. Physik*, t. 104, 1937, p. 381).

[11] Zworykin, Morton, Ramberg, Hillier et Vance, *Elektronoptics and the electron microscope*, John Wiley and Sons, New-York, 1948.

[12] E. G. Ramberg, *Variation of axial aberrations of electron lenses with lens strength* (*J. Appl. Phys.*, vol. 13, 1942, p. 582).

[13] M. Barbier, *Eine Näherungsmethode zur Bildfehlerberechnung der Elektronenoptik* (*Thèse de doctorat*, 1951, chez Leeman A. G., Stockerstrasse 64, Zurich, et nº 3 des *Mitteilungen aus dem Institut für technische Physik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule*, Zurich, éditées par le Professeur E. Baumann).

ÉTUDE ET RÉALISATION D'UN ACCÉLÉRATEUR LINÉAIRE A ONDES STATIONNAIRES POUR ÉLECTRONS [1]

PAR ARMAND SARAZIN.

PREMIÈRE PARTIE.

SOMMAIRE. — *On décrit dans cet exposé les recherches théoriques et expérimentales faites sur un accélérateur linéaire pour électrons à ondes stationnaires de* 1,2 MeV.
L'auteur rappelle d'abord le principe de l'appareil, puis montre dans une première partie comment il est possible de réaliser un résonateur très allongé dans lequel l'onde stationnaire hyperfréquence (λ = 10 cm) *possède une composante principale dont la vitesse de phase est inférieure à celle de la lumière. Il analyse ensuite les traits essentiels des mouvements longitudinaux et transversaux des électrons à l'intérieur de l'accélérateur; il conclut en déterminant de manière approchée les principales dimensions d'un guide accélérateur.*
(C. D. U. : 537.534.)

SUMMARY. — *Theoretical and experimental research is described, made on a standing wave linear accelerator for electrons of* 1.2 MeV.
The author first restates the principle of the apparatus and then shows in the first part how it is possible to design a very long resonator in which the hyperfrequency standing wave (λ = 10 cm) *has a principal component whose phase velocity is less than that of light. He then analyses the main features of the longitudinal and transverse motions of the electrons within the accelerator; he concludes with the approximate determination of the principal dimensions of an accelerator guide.*
(U. D. C. : 537.534.)

INTRODUCTION.

La production de particules accélérées occupe en Physique une place de plus en plus grande. Les accélérateurs actuels ont été des facteurs importants du progrès de la physique nucléaire pendant ces vingt dernières années; mais cette science réclame des appareils encore plus puissants, et il est maintenant désirable de disposer d'énergie de plusieurs milliards d'eV.

Un autre champ d'application non moins intéressant, mais plus étroit, nous est offert par la médecine. Ici, on ne se sert encore que d'électrons et il suffit d'obtenir des énergies beaucoup plus faibles comprises entre un et une vingtaine de MeV.

Les accélérateurs cycliques tels le bétatron, actuellement existants fournissent une solution de ce problème, mais leur encombrement est considérable et ils ne permettent guère d'obtenir de grandes intensités, ni d'opérer directement avec les électrons; ils ne fournissent que des rayons X et leur commodité dans le domaine médical laisse encore à désirer.

L'étude que nous présentons porte sur la construction et la mise au point d'un accélérateur linéaire à ondes stationnaires pour électrons; elle a été développée surtout en vue des applications médicales. Néanmoins les résultats obtenus sont valables aussi pour les accélérateurs puissants, car ceux-ci comprennent, en général, une section initiale à « basse tension ». Nous espérons donc avoir aussi contribué au développement des accélérateurs à très haute puissance.

---

[1] Ce travail a été réalisé dans la section « Accélérateurs de Particule » des laboratoires de la CSF sous la direction du Professeur P. Grivet et de M. J. Vastel, ingénieur.

1. Principe des accélérateurs linéaires.

L'accélérateur linéaire est un appareil employant une source de tension de très haute fréquence pour accélérer des particules décrivant une trajectoire rectiligne. La vitesse de phase du champ haute fréquence produit doit être la même que celle de la particule. Cette dernière conserve alors toujours la même position par rapport à cette onde et peut être considérée comme soumise à une force constante à la condition que le champ ait une composante électrique dans la direction de son déplacement.

En première approximation, l'énergie acquise sera :

$$W(eV) = |E_0| \, l, \qquad (1)$$

$|E_0|$ étant la valeur absolue maximum du champ électrique le long de l'axe en V/cm et l la longueur d'accélération en cm.

Notons qu'une onde ayant une vitesse de phase différente de celle de la particule aura une action moyenne nulle sur celle-ci. En considérant un référentiel lié à la particule, le champ électrique provenant de l'onde ayant une vitesse de phase convenable est continu, tandis que les autres sont alternatifs et au cours d'un cycle, leurs actions s'annulent en moyenne.

Il reviendra donc au même de soumettre la particule à l'action d'un champ dont la vitesse de phase est convenable ou à l'action d'un champ complexe dont la décomposition en série de Fourier fournit une composante ayant la vitesse de phase convenable : si cette composante est importante, on pourra considérer qu'elle agit seule.

2. Accélérateurs à ondes stationnaires et progressives.

Différentes méthodes ont été expérimentées ces dernières années pour obtenir une onde électromagnétique ayant une vitesse de phase inférieure à celle de la lumière.

Mullet [1] a étudié l'emploi d'un guide rectangulaire courbé; Willshaw [2], Bruck et Wicker [3], Sidney, Frankel [4], ont proposé l'emploi d'un guide cylindrique rempli d'un diélectrique solide.

Mais la méthode qui semble avoir trouvé la plus grande faveur consiste à employer un guide cylindrique à l'intérieur duquel sont placées des cloisons métalliques percées d'une ouverture centrale; nous le désignerons du nom de « guide ondulé » (*fig.* 1).

Ces guides ont été employés aussi dans les tubes à ondes progressives, dans les antennes et les filtres pour hyperfréquences.

Leur étude théorique a été entreprise depuis longtemps, mais elle est complexe et parfois difficile. Les travaux les plus importants ont été faits par Brillouin [5] qui a étudié la propagation entre deux demi-plans ondulés, et Chu et Hansen [6], [7], qui ont traité du guide circulaire ondulé proprement dit.

La méthode d'accélération la plus simple consiste alors à faire traverser ce guide par une onde électromagnétique ayant un champ électrique axial et par un faisceau d'électrons également axial. A la sortie du guide, l'onde électromagnétique est dissipée dans une charge sans réflexion. Ainsi les accélérateurs de ce type sont traversés par une onde

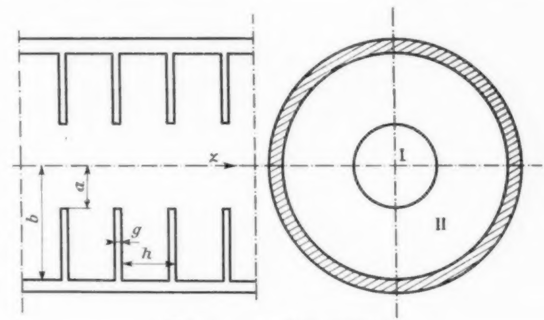


Fig. 1. — Guide ondulé.

progressive et on les a appelés *accélérateurs à ondes progressives*.

Pour un appareil *court*, il ne semble pas à première vue que ce système soit bon puisqu'une partie importante de la puissance se trouve dissipée en pure perte à la sortie du guide. Un remède simple à cet inconvénient met en œuvre le régime d'ondes stationnaires : le guide est maintenant muni de deux fonds réfléchissants et l'onde utile se réfléchit successivement d'une extrémité à l'autre ; la puissance atteint chaque extrémité avec une phase convenable jusqu'à ce qu'elle soit entièrement dissipée, soit par effet Joule dans les parois, soit en accélérant le faisceau d'électrons.

On établit aisément le régime d'ondes stationnaires voulu en limitant un guide ondulé à deux sections droites réfléchissantes convenablement disposées. Tout comme on obtient une cavité cylindrique en limitant un guide ordinaire à deux sections droites, on réalise ainsi une cavité résonnante.

L'appareil ainsi constitué sera appelé *accélérateur à ondes stationnaires*.

Dans notre laboratoire, l'accélérateur linéaire

à ondes progressives avait été étudié par J. Vastel [8]. Il avait construit un premier prototype fournissant un courant de 10 μA d'électrons d'énergie de 0,4 MeV; puis il termina un appareil qui en 1952 fournit une tension de 3 MeV. Parallèlement, et c'est l'objet de ce travail, nous avons cherché à vérifier si la version à ondes stationnaires pouvait présenter en pratique les avantages de principe que la théorie sommaire du paragraphe précédent peut laisser espérer.

C'est pourquoi nous avons étudié en détail un appareil à ondes stationnaires et construit un accélérateur de 1,2 MeV qui sera décrit dans la suite.

Cet accélérateur comprend essentiellement :

— un guide accélérateur;
— un dispositif destiné à produire à l'intérieur de ce guide un champ convenable;
— une source d'électrons.

Avant de présenter les résultats obtenus, nous exposerons nos études sur ces différentes parties.

I. — THÉORIE DE L'ACCÉLÉRATEUR LINÉAIRE.

1. Le guide accélérateur.

1.1. ACCÉLÉRATEUR A ONDES STATIONNAIRES. — Le régime d'ondes stationnaires dans le guide peut être envisagé de deux points de vue différents.

L'accélérateur à ondes stationnaires dérive de l'appareil à ondes progressives et nous savons qu'une onde stationnaire peut être décomposée en deux ondes de vitesses opposées. Les problèmes de dynamique se ramèneront donc à ceux d'une onde progressive puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, une onde dont la vitesse de phase n'est pas égale à la vitesse de l'électron aura une action moyenne nulle. L'étude de la dynamique des électrons se rattachera donc directement aux problèmes de propagation dans les guides d'ondes.

Il est aussi intéressant de regarder ce guide accélérateur comme un ensemble de cavités résonnantes cylindriques placées bout à bout et couplées entre elles par le trou central.

Il est, en effet, possible d'accélérer des électrons avec une seule cavité résonnante et l'on a construit des accélérateurs linéaires, constitués par une succession de cavités alimentées indépendamment par une source hyperfréquence. Le déphasage entre les alimentations et les dimensions des cavités doivent être réglés de façon que les électrons rencontrent à l'entrée de chacune d'elles un champ accélérateur.

Dans l'appareil envisagé ici, on peut appliquer un principe analogue, mais les cavités sont couplées directement par le champ électromagnétique et l'on n'a qu'une seule source d'alimentation.

Appelons section fondamentale la longueur d'accélérateur comprise entre deux points vibrant en opposition de phase. Le fonctionnement en accélérateur exige les conditions suivantes : un électron qui s'est présenté à l'entrée d'une section fondamentale lorsque le champ électrique était accélérateur, doit trouver encore à sa sortie, lorsqu'il entre dans la section suivante, un champ accélérateur. Ceci revient à dire que le *temps de transit d'un électron accéléré, le long d'une section fondamentale doit être égal à une demi-période du champ haute fréquence.*

Mais nous devrons aussi accélérer les électrons en partant d'énergies faibles; les électrons auront donc une vitesse croissante sur tout leur parcours et, en conséquence, les dimensions géométriques des éléments du guide accélérateur devront varier progressivement du début à la fin du tube.

Les travaux théoriques sur ces guides sont d'une telle complexité qu'ils n'ont pas encore été entrepris. Nous nous contenterons ici de faire une brève étude de la première approximation : un guide ondulé uniforme présentant une vitesse de phase inférieure à celle de la lumière. Cette étude ne nous permettra pas d'obtenir les dimensions du guide accélérateur avec une précision suffisante pour sa construction, mais elle nous sera utile pour définir le rôle des principaux paramètres constructifs et nous guider dans les mesures et les ajustements expérimentaux. Enfin elle nous fournira l'occasion de définir un certain nombre de caractéristiques de l'accélérateur d'une façon précise.

En résumé, les résultats de ces considérations théoriques nous permettront d'établir les grandes lignes du projet de notre accélérateur.

1.2. GUIDE ONDULÉ. — Soit z, l'axe le long duquel se déplaceront les électrons; nous voulons obtenir un champ haute fréquence dont la composante électrique le long de z aura une vitesse de phase égale à celle des électrons. Leur vitesse, toujours inférieure à la vitesse de la lumière, sera variable, mais tendra vers celle-ci à la fin de leur parcours. Nous chercherons donc d'abord s'il est possible d'obtenir dans un guide uniforme une onde ayant une vitesse donnée inférieure à c.

La théorie des guides d'onde nous fournit le mode utile pour l'accélérateur : le mode TM_{01} (ou E_{01}) dans lequel le champ électrique possède

une composante longitudinale (suivant l'axe Oz du guide), propre à accélérer les électrons.

Dans un guide circulaire ordinaire, les lignes de force caractéristiques du mode TM_{01} (E_{01}) sont représentées sur la figure 2.

Soit z, r, θ, les coordonnées cylindriques dans le guide accélérateur; $E_z E_r E_\theta$, $H_z H_r H_\theta$, les composantes des champs électrique et magnétique, correspondantes.

Le guide à corrugations possède un certain nombre de propriétés du guide cylindrique ordinaire : la symétrie cylindrique autour de Oz, la validité des équations de Maxwell à l'intérieur, la propagation suivant Oz. Ainsi, comme dans tout mode TM, il n'y a pas de composante axiale du champ magnétique $H_z = 0$; d'autre part, dans les modes TM_0, E_θ est nul ainsi que H_r.

Étudions donc les équations de propagation du mode TM_{01} qui est le plus simple permettant l'accélération d'électrons, en écrivant d'abord toutes les propriétés du guide ordinaire qui sont conservées. Les phénomènes envisagés étant harmoniques par rapport au temps, les facteurs spatiotemporels de propagation le long de Oz restent $e^{j(\omega t - \beta z)}$. Nous sous-entendrons le facteur de temps $e^{j\omega t}$ dans toutes les équations que nous pourrons ainsi simplifier dans ce chapitre.

Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$(2)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial H_\theta}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0 E_r, \qquad \dfrac{\partial E_r}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H_\theta; \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) = j\omega\varepsilon_0 E_z, \qquad \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_r}{\partial \theta} = 0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_z}{\partial \theta} = 0. \end{cases}$$

E_r, E_z, H_θ sont indépendants de θ.

Le système (2) s'écrit :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_\theta}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_0 E_r, \qquad c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}; \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r} rH_\theta\right) = j\omega\varepsilon_0 E_z, \\ \dfrac{\partial E_r}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu_0 H_\theta \end{cases}$$

qui, par élimination de E_r et E_z, donne :

$$(4)\quad \frac{\partial^2 H_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta)\right] = -\omega^2\mu_0\varepsilon_0 H_\theta = -\frac{\omega^2}{c^2} H_\theta.$$

Posons :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

λ, longueur d'onde dans le vide;

k, constante de propagation dans le vide;

$$k^2 = \chi^2 + \beta^2,$$

β, constante de propagation suivant l'axe z;

χ, constante de propagation suivant l'axe r;

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\omega}{v},$$

λ_g, longueur d'onde dans le guide;

v, vitesse de phase;

$$(5)\quad \chi^2 = k^2\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right).$$

L'équation (4) se résoud d'une manière classique en posant les solutions sous la forme

$$H_\theta = f(r)\, e^{-j\beta z},$$

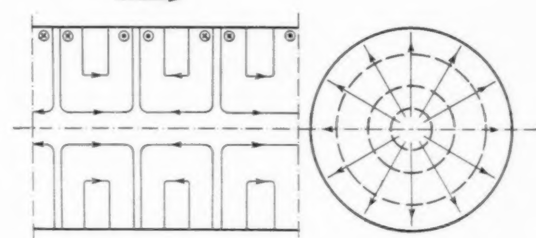


Fig. 2. — Mode TM_{01} dans un guide circulaire.

$f(r)$ étant déterminé par

$$(6)\quad \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}[rf(r)]\right\} + (-\beta^2 + k^2) f(r) = 0.$$

D'après (6), $f(r)$ sera une combinaison linéaire des fonctions de Bessel de première espèce et deuxième espèce, d'ordre 1. La solution générale s'écrit donc :

$$(7)\quad \begin{cases} H_\theta = [A' J_1(\chi r) + B' Y_1(\chi r)]\, e^{-j\beta z}, \\ E_r = \dfrac{\beta}{\omega\varepsilon_0}[A' J_1(\chi r) + B' Y_1(\chi r)]\, e^{-j\beta z}, \\ E_z = \dfrac{\chi}{j\omega\varepsilon_0}[A' J_0(\chi r) + B' Y_0(\chi r)]\, e^{-j\beta z}; \end{cases}$$

E_z s'obtient par dérivation d'une combinaison linéaire des fonctions de Bessel et l'on a, si F désigne cette combinaison :

$$\frac{d}{dr}[rF_1(\chi r)] = \chi r F_0(\chi r),$$

A' et B' étant des constantes déterminées par les conditions aux limites.

Il est intéressant d'introduire d'autres constantes A et B dont l'interprétation physique apparaîtra simple par la suite.

Posons :

$$A' = A\frac{j\omega\varepsilon}{\chi}, \qquad B' = B\frac{j\omega\varepsilon}{\chi},$$

$$(8)\quad \begin{cases} E_z = [A_0 J_0(\chi r) + B Y_0(\chi r)]\, e^{-j\beta z}, \\ E_r = j\dfrac{\beta}{\chi}[A J_1(\chi r) + B Y_1(\chi r)]\, e^{-j\beta z}, \\ H_0 = \dfrac{1}{\eta_0} j \dfrac{k}{\chi}[A J_1(\chi r) + B Y_1(\chi r)]\, e^{-j\beta z}, \end{cases}$$

η_0 étant l'impédance intrinsèque du vide

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\,\Omega.$$

Dans la région voisine de l'axe, le champ est régi par ces équations et, par conséquent, leur forme doit être telle que le champ reste fini sur l'axe, donc $B = 0$ car la fonction Y devient infinie pour $r = 0$. Nos équations se réduisent ainsi à

$$(9)\quad \begin{cases} E_z = A J_0(\chi r)\, e^{-j\beta z}, \\ E_r = j\dfrac{\beta}{\chi} A J_1(\chi r)\, e^{-j\beta z}, \\ H_0 = \dfrac{1}{\eta_0} j \dfrac{k}{\chi} J_1(\chi r)\, e^{-j\beta z}. \end{cases}$$

Ces équations peuvent décrire trois cas physiquement différents, suivant la valeur imposée à χ par les conditions aux limites : ce sont des conditions aux limites particulières, qui font l'originalité du guide ondulé et le distinguent du guide ordinaire à section circulaire; les équations (9), au contraire, sont valables aussi bien pour l'un que pour l'autre.

a. χ réel. — La composante du champ électrique suivant l'axe des z varie comme $J_0(\chi r)$, c'est-à-dire qu'elle décroît lorsque r augmente, s'annulant une première fois pour $(\chi r) = 2{,}4048$. Ensuite elle est oscillatoire et présente un nombre infini de valeurs nulles, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de l'axe.

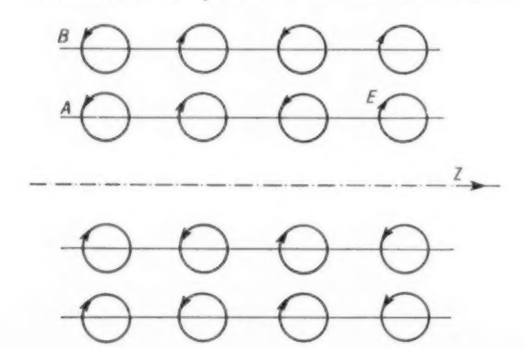


Fig. 3. — Champ électrique pour χ réel.

Le champ électrique correspondant a été représenté schématiquement sur la figure 3. Un tel champ se trouve réalisé dans les guides cylindriques ordinaires, car il suffit de limiter le champ par un cylindre conducteur passant par A ou par B pour obtenir des conditions aux limites satisfaisantes; le champ électrique sera partout perpendiculaire à cette surface. Nous retrouvons le guide d'onde ordinaire, mais d'après (5), $v > c$, la vitesse de phase est toujours supérieure à la vitesse de la lumière; un guide de ce genre ne peut donc pas être employé dans un accélérateur.

b. $\chi = 0$. — La vitesse de phase est égale à la vitesse de la lumière et le champ suivant z est constant lorsque r varie.

c. χ imaginaire. — On a $v < c$. La vitesse de phase est inférieure à celle de la lumière comme

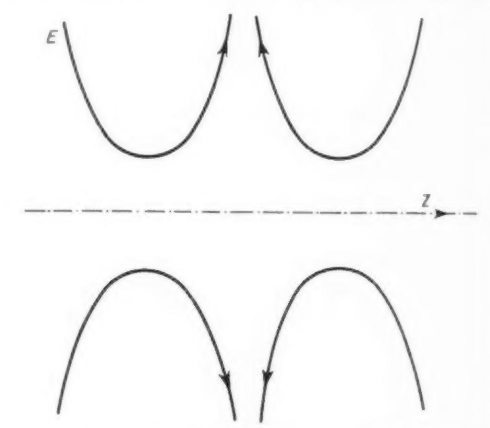


Fig. 4. — Champ électrique pour χ imaginaire.

nous le désirons. La variation de E_z suivant r est donnée par celle de $J_0(j\,|\chi|\,r)$, fonction de Bessel d'argument imaginaire. C'est une fonction réelle constamment croissante avec r, qui ressemble asymptotiquement à $\frac{1}{\sqrt{2\pi z}}e^{z}$. Le champ a la distribution représentée sur la figure 4; il n'est naturellement plus possible de disposer un simple cylindre conducteur pour limiter cette région, car le champ n'est jamais perpendiculaire à l'axe.

Nous désignerons, suivant la tradition, les fonctions réelles $J_0(jz)$ et $-jJ_1(jz)$ par $I_0(z)$ et $I_1(z)$ et nous poserons $j\chi' = \chi$.

La fonction $I_0(\chi' r)$ donne la variation radiale de la composante longitudinale du champ électrique

Il est à noter que cette variation est assez lente, et que le champ reste à peu près uniforme même assez loin de l'axe. Il varie de moins de 10 % lorsque χ' passe de 1 à 0,6.

Définissons Z_r *l'impédance radiale* de l'onde.

$$(10)\quad Z_r = -\frac{E_z}{H_\theta} = \frac{\tau_0\chi'}{k}\,\frac{J_0(\chi r)}{-j\,J_1(\chi r)} = j\,\frac{\tau_0\chi'}{k}\,\frac{I_0(\chi' r)}{I_1(\chi' r)},$$

$\frac{I_0(\chi' r)}{I_1(\chi' r)}$ étant toujours réel et positif. *Z_r est donc une impédance inductive pour toutes les valeurs de r.* Ainsi pour pouvoir réaliser les conditions souhaitées et assurer une valeur imaginaire à χ, il faut réaliser une impédance inductive aux limites du champ c'est-à-dire tout le long d'un cylindre de révolution entourant la région utile.

Voyons maintenant comment cette condition se trouve approximativement réalisée par les corrugations. Dans le guide ondulé (*fig.* 1), on peut assimiler chaque cannelure à une ligne de transmission radiale constituée par deux plans parallèles et dont l'extrémité est court-circuitée par un cylindre. Si la longueur électrique d'une telle ligne est inférieure à $\frac{\lambda}{4}$, *l'impédance d'entrée sera inductive* et nous voyons que dans un guide ondulé la succession des cannelures, empilement de lignes radiales, permettra de réaliser approximativement les conditions aux limites convenables et donc d'obtenir des ondes dont la vitesse est inférieure à c : comme les conditions ne sont pas rigoureusement satisfaites, nous obtiendrons en même temps d'autres ondes parasites dont le rôle est heureusement négligeable dans l'accélération.

1.3. Calcul du champ dans un guide ondulé. — Nous distinguerons dans un tel guide deux régions que nous désignerons par les indices 1 et 2; les dimensions caractéristiques a, b, h, sont définies sur la figure 1. Nous allons préciser la structure du champ dans la région II, celle des cannelures, dans le but d'établir une relation entre l'impédance radiale à la frontière I et II, et les dimensions géométriques du guide ondulé. Nous envisagerons tout d'abord la seule existence d'une onde fondamentale dans le milieu I; nous supposerons aussi que l'épaisseur des cloisons peut être négligée et que le nombre d'encoches par longueur d'onde est suffisamment grand pour que l'on puisse envisager une solution continue des équations de propagation dans le milieu II. Ces conditions ne sont qu'approximativement réalisées dans l'appareil réel, mais les propriétés du modèle idéal se rapprochent assez étroitement de la réalité pour que son étude nous livre d'importants renseignements.

Le champ dans la région II, $a < r < b$, peut être exprimé de la même façon que dans la région I puisque ces deux régions ont la même symétrie. Les équations de Maxwell s'écrivent, comme dans le cas précédent, et donnent pour le mode le plus simple : $a < r < b$,

$$(11)\quad \begin{cases} E_{2z} = \{B\,J_0(kr) + C\,Y_0(kr)\}\,e^{-j\beta_2 z}, \\ H_{2\theta} = \dfrac{1}{\tau_0}\{B\,J_1(kr) + C\,Y_1(kr)\}\,e^{-j\beta_2 z}. \end{cases}$$

Les constantes A, B, C sont déterminées par les conditions aux limites qui sont ici partiellement différentes de celles régnant dans la région I; en particulier la région II ne contient pas l'axe, et la fonction Y ne sera plus exclue des formules.

1° Les composantes tangentielles du champ électrique pour $r = a$ doivent être égales dans les régions I et II.

$$(12)\quad A\,J_0(\chi_1 a)\,e^{-j\beta_1 z} = [B\,J_0(ka) + C\,Y_0(ka)]\,e^{-j\beta_2 z}.$$

Cette équation ne peut être satisfaite pour toutes les valeurs de z que si $\beta_1 = \beta_2$. Les constantes de phase doivent être identiques dans les deux milieux, c'est-à-dire que la phase des deux ondes doit se propager exactement à la même vitesse, ce qui est bien naturel. Puisqu'il en est ainsi nous pouvons supprimer les indices à ces deux quantités.

2° Pour $r = a$, les composantes tangentielles du champ magnétique à la surface de séparation doivent être les mêmes

$$H_{2\theta} = H_{1\theta},$$

$$(13)\quad A\,\frac{k}{\chi}\,J_1(\chi a) = [B\,J_1(ka) + C\,Y_1(ka)].$$

3° Pour $r = b$, la paroi extérieure est conductrice et E_{2z} doit être partout nul

$$(14)\quad B\,J_0(kb) + C\,Y_0(kb) = 0.$$

Ces trois équations fournissent un système d'équations linéaires et homogènes en A, B, C; elles n'auront de solutions acceptables, non nulles, que si elles sont compatibles, c'est-à-dire si le déterminant constitué par les coefficients de ces trois quantités est nul

$$(15)\quad \begin{vmatrix} J_0(\chi a) & -J_0(ka) & -Y_0(ka) \\ 0 & J_0(kb) & Y_0(kb) \\ \dfrac{k}{\chi}J_1(\chi a) & -J_1(ka) & -Y_1(ka) \end{vmatrix} = 0.$$

En développant par rapport aux éléments de la première colonne, on obtient

$$(16)\quad \frac{J_0(\chi a)}{J_1(\chi a)} = \frac{k}{\chi}\,\frac{Y_0(kb)J_0(ka) - Y_0(ka)J_0(kb)}{Y_0(kb)J_1(ka) - J_0(kb)Y_1(ka)},$$

Ici nous considérerons les conditions de propagation comme données, c'est-à-dire que *la fréquence de fonctionnement et la vitesse de phase sont données par des conditions électroniques* (vitesse des électrons à accélérer); il en résulte d'après les formules (5) que β, χ et k sont fixées :

$$(5')\quad \beta = \frac{\omega}{v}, \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \chi^2 = \omega^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right).$$

L'équation (16) définit alors une relation nécessaire entre a et b. Pour réaliser les conditions désirées, nous rapporterons les constantes de la région II (B et C) à celles de la région I (A) en posant

$$B = pA \qquad \text{et} \qquad C = qA.$$

(12), (13), (14) s'écrivent :

$$J_0(\chi a) = p\,J_0(ka) + q\,Y_0(ka),$$
$$0 = p\,J_0(kb) + q\,Y_0(kb),$$
$$\frac{k}{\chi}J_1(\chi a) = p\,J_1(ka) + q\,Y_1(ka)$$

et, d'après l'identité mathématique,

$$Y_0(x)J_1(x) - Y_1(x)J_0(x) = \frac{2}{\pi x},$$

on a

$$p = \frac{J_0(\chi a)Y_1(ka) - \frac{k}{\chi}J_1(\chi a)Y_0(ka)}{\frac{2}{\pi ka}},$$

$$q = \frac{J_0(\chi a)J_1(ka) - \frac{k}{\chi}J_1(\chi a)J_0(ka)}{\frac{2}{\pi ka}}.$$

Les équations du champ dans le guide seront :

$$(17)\quad \begin{cases} E_{1z} = A\,J_0(\chi r)\,e^{-j\beta z}, \\ E_{1r} = j\frac{\beta}{\chi}A\,J_1(\chi r)\,e^{-j\beta z}, \\ H_{1\theta} = j\frac{A}{\eta_0}\frac{k}{\chi}J_1(\chi r)\,e^{-j\beta z}; \end{cases} \quad \text{Région I : } 0 < r < a;$$
$$\qquad \begin{cases} E_{2z} = A[p\,J_0(kr) + q\,Y_0(kr)]\,e^{-j\beta z}, \\ H_{2\theta} = j\frac{A}{\eta_0}[p\,J_1(kr) + q\,Y_1(kr)]\,e^{-j\beta z}, \end{cases} \quad \text{Région II : } a < r < b,$$

où

$$(18)\quad \begin{cases} p = \frac{\pi}{2}\frac{k}{\chi}a[\chi J_0(\chi a)Y_1(ka) - k\,J_1(\chi a)Y_0(ka)], \\ q = \frac{\pi}{2}\frac{k}{\chi}a[\chi J_0(\chi a)J_1(ka) - k\,J_1(\chi a)J_0(ka)]. \end{cases}$$

Les dimensions a et b étant liées aux valeurs choisies pour χ et k, par la condition :

$$(19)\quad \frac{\chi}{k}\frac{J_0(\chi a)}{J_1(\chi a)} = \frac{Y_0(kb)J_0(ka) - Y_0(ka)J_0(kb)}{Y_0(kb)J_1(ka) - J_0(kb)Y_1(ka)},$$

celle-ci peut être simplifiée en séparant les variables a et b :

$$\frac{\chi}{k}\frac{J_0(\chi a)}{J_1(\chi a)} = \frac{\frac{Y_0(kb)}{J_0(kb)} - \frac{Y_0(ka)}{J_0(ka)}}{\frac{Y_0(kb)}{J_0(kb)} - \frac{Y_1(ka)}{J_1(ka)}}\,\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)},$$

$$(20)\quad \frac{Y_0(kb)}{J_0(kb)} = \frac{\frac{\chi}{k}\frac{J_0(\chi a)}{J_1(\chi a)}\frac{Y_1(ka)}{J_1(ka)} - \frac{Y_0(ka)}{J_1(ka)}}{\frac{\chi}{k}\frac{J_0(\chi a)}{J_1(\chi a)} - \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}}.$$

Cette forme (20) est pratique pour les calculs, puisque les quantités $\frac{J_0(s)}{Y_0(s)}$, $\frac{J_0(s)}{J_1(s)}$, $\frac{Y_1(s)}{J_1(s)}$ sont fournies par des tables [9].

Il est à noter que la constante A représente l'amplitude maxima du champ électrique le long de l'axe [$r = 0$ donne $J_0(\chi r) = 1$]. Si l'on désigne comme d'ordinaire cette dernière par E_0, on a

$$A = E_0.$$

E_0 est lié à la puissance envoyée dans le guide. Celle-ci peut être évaluée en intégrant le vecteur de Poynting sur une section transversale du guide. Il est commode de faire l'intégration sur la surface d'un trou central, r variant de 0 à a, ce qui fait intervenir les champs de la région I seulement. (On ne considère toujours que la composante fondamentale.)

Soit P la puissance moyenne transmise :

$$(21)\quad P = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^{2\pi} E_r.\bar{H}_\theta\, r\,d\theta\,dr,$$

$\bar{H}_\theta$ étant la quantité conjuguée de H_θ

$$P = \frac{1}{2}\int_0^a 2\pi\frac{E_0^2}{\eta_0}\frac{k}{\chi}\frac{\beta}{\chi}J_1^2(\chi r)r\,dr$$
$$= \frac{\pi E_0^2}{\eta_0}\frac{k\beta}{\chi^2}\int_0^a J_1^2(\chi r)r\,dr.$$

En utilisant la relation :

$$(22)\quad \int r J_n^2(\chi r)\,dr = \frac{r^2}{2}[J_n^2(\chi r) - J_{n-1}(\chi r)J_{n+1}(\chi r)],$$

on obtient :

$$(23)\quad P = \frac{\pi a^2}{2}\frac{E_0^2}{\eta_0}\frac{k\beta}{\chi^2}[J_1^2(\chi a) - J_0(\chi a)J_2(\chi a)].$$

Ainsi il est possible d'obtenir la valeur du champ maximum sur l'axe en fonction de la puissance moyenne circulant dans le guide.

$$E_0^2 = \frac{2 P \eta_0 \chi^2}{\pi a^2 k \beta [J_1^2(\chi a) - J_0(\chi a) J_2(\chi a)]}. \tag{24}$$

Au chapitre III, cette formule nous permettra de déterminer la loi de variation du rayon (a) en fonction de z, nécessaire si l'on veut maintenir le champ constant le long de l'axe lorsque la hauteur de chaque encoche diminue; comme nous l'avons déjà signalé, cette complication est nécessaire pour que la vitesse de phase de l'onde reste égale à la vitesse des électrons qui augmente régulièrement d'un bout à l'autre du guide.

Il est intéressant d'établir la forme limite très simple de cette formule, valable lorsque la vitesse de l'onde devient très voisine de c.

Si v tend vers c, χ tend vers zéro, et près de la limite on a :

$$\lim_{\chi a = 0} J_0(\chi a) \to 1, \qquad \lim_{\chi a = 0} J_1(\chi a) = \frac{\chi a}{2}\left(1 - \frac{\chi^2 a^2}{8}\right),$$

$$\lim_{\chi a = 0} J_2(\chi a) = \frac{\chi^2 a^2}{8}.$$

On a donc si χ tend vers zéro

$$E_0^2 \to \frac{2 P \eta_0}{\pi a^2} \frac{\chi^2}{k \beta} \frac{1}{\frac{\chi^2 a^2}{8}\left(1 + \frac{\chi a}{2}\right)},$$

$$E_0^2 \to \frac{16 P \eta_0}{\pi k^2 a^4} \frac{1}{1 + \frac{\chi a}{2}}.$$

Or

$$\eta_0 = 120 \pi = 377 \Omega, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

ce qui donne

$$E_0^2 = \frac{480 \lambda^2 P}{\pi^2 a^4}\left(1 - \frac{\chi a}{2}\right) \tag{25}$$

qui se réduit pratiquement à :

$$E_0^2 = \frac{480 \lambda^2}{\pi^2 a^4} P, \tag{26}$$

$$E_0 \neq \frac{6{,}98 \lambda}{a^2} \sqrt{P}. \tag{27}$$

De même, la condition (20) prendra une forme plus simple lorsque χ tend vers zéro. $\frac{J_0(\chi a)}{J_1(\chi a)}$ tend vers $\frac{2}{\chi a}$ et (20) tend vers :

$$\frac{Y_0(kb)}{J_0(kb)} \to \frac{2 Y_1(ka) - ka\, Y_0(ka)}{2 J_1(ka) - ka\, J_0(ka)}. \tag{28}$$

Enfin, les équations (9) exprimant le champ dans la région voisine de l'axe se simplifient beaucoup aussi lorsque v est voisin de c. Elles prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} E_z &= E_0\, e^{-j\beta z}, \\ E_r &= j \frac{kr}{2} E_0\, e^{-j\beta z}, \\ H_\theta &= j \frac{kr}{2} \frac{E_0}{\eta_0} e^{-j\beta z} = \frac{E_r}{\eta_0}. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

La composante du champ électrique sur l'axe des z devient indépendante de r.

1.4. Étude générale d'un guide ondulé. — La précision de ces formules est bonne, mais cependant insuffisante pour déterminer la construction d'un guide ondulé. Il serait possible d'augmenter la précision de cette étude en considérant l'ensemble des composantes de l'onde électromagnétique qui traversent le guide.

On pourra satisfaire ainsi d'une façon plus exacte aux conditions aux limites, mais la complication des calculs rend l'utilité des résultats ainsi obtenus, illusoire, et nous avons préféré compléter les indications de la théorie élémentaire par des mesures.

Néanmoins, il est encore utile de faire apparaître le rôle des corrugations réelles, qui contrairement à ce que nous avions supposé jusqu'ici sont en nombre fini : la périodicité ainsi créée se traduit par la naissance de modes harmoniques de l'onde fondamentale seule considérée jusqu'à présent.

Nous savons [théorème de Floquet [1]] que les champs électriques et magnétiques seront multipliés par une constante lorsque nous nous déplacerons le long de l'axe des z d'une période du guide ondulé. Écrivons cette constante sous la forme $e^{-\gamma l'}$, où l' désigne la période du guide. La fonction $e^{-\gamma z}$ a la propriété désirée; mais la fonction la plus générale jouissant de cette propriété revet la forme du produit d'une fonction périodique de z de période l' par $e^{-\gamma z}$. Cette fonction s'écrira sous la forme d'une série de Fourier dont les termes sont

$$e^{-j\frac{2\pi n z}{l'}}, \quad \text{où } n \text{ est un entier.}$$

Les champs pourront donc se mettre sous la forme d'une série dont les termes seront le produit de certains coefficients par les exponentielles

$$e^{\left(-\gamma - j\frac{2\pi n}{l'}\right) z}. \tag{31}$$

---

[1] Pour une fréquence et un mode d'oscillation donnés dans un guide de structure périodique, la fonction d'onde est multipliée par une constante donnée quand on se déplace

Nous savons que la constante γ doit être imaginaire pure pour qu'il y ait propagation et en posant $\gamma = j\beta$ (31), s'écrit

$$e^{-j\left(\beta+\frac{2\pi n}{l'}\right)z}, \tag{32}$$

en posant

$$\beta_n = \beta + \frac{2\pi n}{l'}$$

l'exponentielle devient

$$e^{-j\beta_n z}. \tag{33}$$

C'est le terme que nous avions précédemment où β a été remplacé par β_n. L'onde a alors la vitesse

$$v_n = \frac{\omega}{\beta_n}.$$

Ainsi l'onde électromagnétique existant réellement dans le guide peut être décomposée en une série d'ondes de vitesse v_n.

Nous savons déjà que seule l'onde dont la vitesse est très voisine de celle des électrons sert à l'accélération. En effet, le champ électrique le long de l'axe peut s'écrire :

$$E_z = \sum_n A_n e^{(j\omega t - j\beta_n z)}. \tag{34}$$

On a $\beta_n = \frac{\omega}{v_n}$ et si l'on désigne par v la vitesse de l'électron, on peut écrire $t = \frac{z}{v}$ puisque l'onde fondamentale accompagne l'électron. Il s'ensuit :

$$E_z = \sum_n A_n e^{j\omega z\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_n}\right)}. \tag{35}$$

On voit que les composantes partielles de E_z qui ont une vitesse v_n nettement différente de v, ont une valeur moyenne nulle sur une assez longue distance donc une action nulle en moyenne. Seul le fondamental a la valeur v désirable et peut servir à l'accélération. Les autres composantes n'auront de rôle important que dans l'établissement du champ. Les équations (9) s'écriront alors pour elles :

$$E_z = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n J_0(\chi_n r) e^{-j\beta_n z},$$

$$E_n = \sum_{-\infty}^{+\infty} j \frac{\beta_n}{\chi_n} A_n J_1(\chi_n r) e^{-j\beta_n z},$$

$$H_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} j \frac{A_n}{\tau_0} \frac{k}{\chi_n} J_1(\chi_n r) e^{-j\beta_n z}.$$

---

le long du guide d'une période de celui-ci (*cf.* L. BRILLOUIN, *Propagation in periodic structures*).

De même, l'expression du champ dans les encoches peut être mise sous la forme d'une série de Fourier. Les conditions aux limites se traduisent comme précédemment, mais le déterminant obtenu a un nombre infini de termes. Deux auteurs (Walkinshaw [10] et Lewin [11]) ont envisagé le problème sous cet aspect en se limitant aux trois premiers modes.

Les calculs, même réduits à trois termes ne fournissent pas des résultats assez précis pour nous permettre de construire notre guide accélérateur.

De plus, nous n'avons jusqu'ici envisagé qu'un guide théorique dans lequel la vitesse de phase est constante. En réalité, à mesure que les électrons traversent l'accélérateur, leurs énergies augmentent et, par suite, leurs vitesses jusqu'à ce qu'ils aient atteint des vitesses voisines de celle de la lumière. Il est donc nécessaire de construire un guide dont les dimensions varient d'une extrémité à l'autre afin d'accorder d'une façon exacte la vitesse de phase à celle des électrons. Aucun calcul n'a encore été tenté, ni ne semble possible, pour décrire des conditions aussi compliquées.

Cette étude sera faite expérimentalement chapitre II.

1.5. PARAMÈTRES ÉNERGÉTIQUES DU GUIDE. LONGUEUR D'ATTÉNUATION. — *Vitesse de groupe* : v_g. — Dans le régime d'ondes progressives, nous définirons la vitesse de groupe comme dans un guide ordinaire par v_g tel que

$$v_g = c\,\frac{d\left(\frac{1}{\lambda_0}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda_g}\right)} = \frac{v^2}{c}\,\frac{d\lambda_0}{d\lambda_g}, \tag{36}$$

où λ_g est la longueur d'onde dans le guide, λ_0 la longueur d'onde des ondes libres de fréquence f dans le vide, v_g la vitesse de propagation de l'énergie. Le flux d'énergie Σ traversant une section droite du guide par unité de temps sera le produit de v_g par la densité d'énergie par unité de longueur et si l'énergie totale W est contenue dans une longueur de guide l, on aura

$$v_g \frac{W}{l} = \Sigma.$$

Facteur de qualité Q du guide Q_0. — Le guide ondulé fonctionnant en régime d'ondes stationnaires se comporte, comme toute autre cavité résonnante, et nous définirons le facteur de qualité Q du guide

ondulé en adaptant l'équation ordinaire de la manière suivante :

$$(37)\quad \frac{1}{Q_0} = \frac{\text{Énergie perdue par effet Joule par seconde}}{\omega \times \text{Énergie emmagasinée}} = \frac{W_p}{\omega_W};$$

ici, W_p est encore l'énergie dissipée, W l'énergie emmagasinée, mais nous évaluons ces énergies par *unité de longueur*. Autrement dit, la cavité étant très longue, nous négligeons les pertes aux extrémités pour ne considérer que les pertes latérales et nous faisons intervenir dans la formule au numérateur comme au dénominateur les pertes par unité de longueur, ce qui se montrera utile au paragraphe suivant.

Longueur d'atténuation. — La longueur d'atténuation sera la longueur d'un guide traversé par une onde progressive au bout de laquelle le rapport du flux de puissance à travers la section finale à celui à l'origine sera $\frac{1}{e}$.

Considérons une section du guide accélérateur parcourue par une onde progressive. Σ étant le flux de puissance à travers une section droite, W l'énergie emmagasinée par unité de longueur et W_p la puissance dissipée par unité de longueur, on aura :

$$(38)\quad \frac{\partial \Sigma}{\partial z}\,\mathrm{d}z + W_p\,\mathrm{d}z = 0.$$

Comme $\Sigma = v_g\, W$, on obtient

$$Q_0 = \frac{\omega \Sigma}{v_g W_p}, \qquad W_p = \frac{\omega \Sigma}{v_g Q_0},$$

ce qui nous mène à :

$$v_g \frac{\partial \Sigma}{\partial z} + \frac{\omega}{Q_0}\Sigma = 0,$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\Sigma} = -\frac{\omega}{Q_0 v_g}\,\mathrm{d}z,$$

$$(39)\quad \Sigma = \Sigma_0\, e^{-\frac{\omega}{Q_0 v_g} z} = \Sigma_0\, e^{-\frac{z}{L}}.$$

La longueur d'atténuation sera donc :

$$(40)\quad L = \frac{Q_0 v_g}{\omega}$$

ou encore

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{Q_0}{2\pi}\,\frac{v_g}{c}.$$

Temps d'atténuation τ. — τ sera le temps durant lequel un observateur cheminant avec la vitesse de l'énergie v_g, voit la densité d'énergie diminuer dans le rapport $\frac{1}{e}$. L'énergie pendant le temps $\mathrm{d}t$, parcourt l'espace $\mathrm{d}z = v_g\,\mathrm{d}t$. Pour cela l'énergie doit parcourir la distance L avec la vitesse v_g; elle met donc le temps τ :

$$(41)\quad \tau = \frac{Q_0}{\omega}.$$

Onde progressive et onde stationnaire. — Les grandeurs L et τ gardent un sens dans le régime d'ondes stationnaires : il suffit de décomposer l'onde stationnaire en deux ondes progressives cheminant en sens inverse. Il est facile de vérifier que dans ce cas particulier (ondes en sens inverse) les énergies s'ajoutent, on a

$$W = W_1 + W_2, \qquad W_p = W_{p_1} + W_{p_2},$$

les indices 1 et 2 désignant les ondes partielles qui cheminent en sens inverse; les valeurs de L et τ attribuées à l'onde stationnaire sont alors celles qui caractérisent chacune des ondes composantes.

Calcul du flux de puissance. — L'énergie totale $\mathcal{W}$ dans le guide sera proportionnelle au produit de $\varepsilon_0 E_0^2$ (E_0 étant la valeur maximum du champ électrique) par son volume. Les dimensions linéaires du guide étant proportionnelles à λ, sauf la longueur, on pourra écrire $\mathcal{W}$ sous la forme :

$$(42)\quad \mathcal{W} = \varepsilon_0 E_0^2\, p\, \lambda^2 l,$$

p étant une constante qui dépend de la répartition du champ à l'intérieur du guide; soit W_p la puissance dissipée par seconde dans le guide utilisé pour accélérer les électrons (puissance que nous supposerons toujours être faible) :

$$Q_0 W_p = p\,\varepsilon_0 E_0^2 \lambda^2 l\,\omega.$$

L'énergie utilisée pour l'accélération des électrons pourrait n'être pas très faible devant l'énergie dissipée par effet Joule, mais nous ne considérerons pas ici ce cas étudié par Johnsen [12]; W_p sera pratiquement égal à l'énergie fournie au guide par seconde et en désignant cette dernière par W_0 on aura :

$$W_0 = \frac{p\,\varepsilon_0 E_0^2 \lambda^2 l\,\omega}{Q_0} \qquad \text{ou} \qquad E_0^2 = \frac{Q_0 W_0}{p\,\varepsilon_0 \lambda^2 \omega\, l},$$

$$\varepsilon \lambda \omega = 2\pi c\,\varepsilon = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{2\pi}{\eta_0}.$$

Posons

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}},$$

$$(43)\quad E_0 = \sigma\sqrt{\eta_0}\sqrt{\frac{W_0}{l}}\sqrt{\frac{Q_0}{\lambda}}.$$

Ainsi le champ accélérateur est proportionnel à la racine carrée de la puissance fournie au guide et à celle de la qualité du résonateur; enfin, elle varie aussi comme $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$.

Comparaison avec le guide à ondes progressives. — Si l'appareil était à ondes progressives, la formule (43) ne serait plus vraie. L'énergie fournie au guide serait en partie perdue par effet Joule et en partie dissipée dans une charge sans réflection à la sortie.

On aurait alors :

W_0 = pertes Joule + flux de puissance dans la terminaison.

$$\text{Pertes Joules} = \frac{\omega W}{Q_0}.$$

$$\text{Flux de puissance} = v_g \frac{W}{l};$$

$$W_0 = \frac{\omega \mathcal{W}}{Q_0} + v_g \frac{\mathcal{W}}{l} = \frac{\omega \mathcal{W}}{Q_0}\left(1 + \frac{v_g Q_0}{\omega l}\right).$$

Introduisons L longueur d'atténuation donnée par (40)

$$W_0 = \frac{\omega \mathcal{W}}{Q_0}\left(1 + \frac{L}{l}\right)$$

et le champ correspondant à l'alimentation à puissance W_0 de l'accélérateur à ondes progressives s'écrira, en procédant à partir de cette nouvelle expression de W_0, comme précédemment

$$E = \sigma \sqrt{r_{s0}} \sqrt{\frac{W_0}{l}} \sqrt{\frac{Q_0}{\lambda_0}} \sqrt{\frac{l}{l + L}}. \tag{44}$$

En comparant (44) et (43), nous voyons que pour une même puissance W_0 fournie au guide donné, le champ accélérateur est plus grand lorsque l'appareil fonctionne en ondes stationnaires; elle fournit une tension d'accélération supérieure à celle obtenue dans le fonctionnement en ondes progressives tant que l'appareil est court, c'est-à-dire que sa longueur l est sensiblement plus petite que L longueur d'atténuation.

Liaison entre σ et la valeur moyenne du champ électrique dans le guide. — Posons $< E^2 >$ la valeur moyenne du carré de l'amplitude du champ électrique à l'intérieur du résonateur et calculons $\mathcal{W}$ énergie totale emmagasinée en fonction de $< E^2 >$.

La densité d'énergie aux instants

$$t_1, \qquad t_2 = t_1 + \frac{T}{2}, \qquad t_3 = T_1 + \frac{T}{2},$$

où l'énergie n'est présente que sous la forme électrique est en chaque point $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$.

L'énergie totale aux mêmes instants, est suivant la définition de la valeur moyenne

$$\mathcal{W} = \frac{\varepsilon \langle E^2 \rangle}{2} V, \tag{45}$$

V étant le volume du résonateur.

Négligeant l'épaisseur des cloisons, on a

$$V = \pi b^2 l$$

d'où

$$\mathcal{W} = \pi b^2 l \frac{\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle}{2}. \tag{46}$$

Comparons à l'équation (42) qui définit p :

$$\mathcal{W} = \varepsilon_0 E_0^2 p \lambda^2 l,$$

on obtient

$$p = \frac{\pi b^2}{2\lambda^2} \frac{\langle E^2 \rangle}{E_0^2}.$$

On en déduit $\left(\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\right)$.

$$\sigma = \frac{\lambda}{\pi b} \frac{E_0}{\sqrt{\langle E^2 \rangle}}. \tag{47}$$

L'intérêt de cette formule est que le quotient $\frac{E_0}{\sqrt{\langle E^2 \rangle}}$ nous sera fourni par les mesures; on pourra donc en déduire la valeur de la constante de forme σ.

2. Mouvement longitudinal des électrons.

2.1. Composante active du champ. — Les électrons suivent un chemin assez voisin de l'axe pour qu'il soit possible de remplacer dans les équations (20) du champ $J_1(\chi r)$ et $J_0(\chi r)$ par le premier terme de leur développement limite; nous montrerons, en effet, dans le paragraphe suivant qu'une focalisation magnétique auxiliaire donne un moyen commode de maintenir les électrons au voisinage de l'axe. Ainsi nous n'aurons à considérer ici que le mouvement longitudinal suivant Oz.

Dans ce cas, le seul champ accélérateur est :

$$E_z = E_0 J_0(\chi r) e^{-i(\beta z - \omega t)} \tag{48}$$

et comme $J_0(\chi r) = 1$, nous avons, en termes réels :

$$E_z = E_0 \cos(\beta z - \omega t), \qquad \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{\omega}{v},$$

v étant la vitesse de phase

$$E_z = E_0 \cos \omega \left(\frac{z}{v} - t\right). \tag{49}$$

Dans le cas où v est constant, nous avons vu que seule la composante fondamentale du champ avait une influence accélératrice, celles des autres

s'annulant sur une période. Nous considérerons le mouvement d'une particule le long de Oz soumise au seul champ accélérateur :

$$E_z = E_0 \cos\omega\left(\frac{z}{v} - t\right).$$

Le problème revient ainsi à l'étude du mouvement d'un électron accéléré par une onde plane (E fonction de z et de t seulement), monochromatique (t n'intervient que par un terme en cosinus) et peut être alors résolu.

2.2. PARTICULES IMMOBILES RELATIVEMENT A L'ONDE. — Nous supposerons que le guide accélérateur :

a. Produit une amplitude de champ E_0 constante tout le long de l'axe;

b. Qu'il est construit de manière que l'onde ait une vitesse de phase variable d'une extrémité à l'autre, de façon à accompagner un certain groupe de particules au cours de l'accélération sans les dépasser, ni les laisser prendre d'avance;

Le groupe de particules privilégiées que nous envisageons sera appelé groupe immobile par rapport à l'onde.

On peut choisir la construction pour que ce groupe ait une position initiale (et, par conséquent, finale) arbitraire par rapport à la crête de l'onde prise pour origine, dans un certain domaine limité. Nous allons d'abord établir la loi du mouvement du groupe immobile relativement à l'onde, dans un référentiel fixe.

L'énergie acquise par un électron ayant traversé une longueur z du guide accélérateur est Ez. Le théorème des forces vives nous donne alors :

$$(50) \qquad E z = T - T_0,$$

T et T_0 étant les énergies cinétiques à la cote z et à l'entrée du guide ($z = 0$). Nous poserons

$$(51) \qquad T_0 = E z_0, \qquad z + z_0 = l_1, \qquad \frac{m_0 c^2}{eE} = s$$

et l'expression relativiste de T fournit alors :

$$(52) \qquad E l_1 = \frac{m_0 c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right),$$

soit

$$\frac{l_1}{s} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{l}{s}+1\right)^2},$$

$$(53) \qquad \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\frac{dz}{dt} = \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{l}{s}+1\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

équation qui s'intègre en

$$\int c\,dt = \int \frac{dl_1}{\sqrt{1-\frac{s^2}{(l_1+s^2)}}},$$

soit

$$\frac{c(t+t_0)}{s} = \left[\left(\frac{l_1}{s}+1\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}},$$

t_0 étant une constante.

En résolvant cette équation en l_1, nous obtenons :

$$l_1 = z + z_0 = \sqrt{s^2 + c^2(t+t_0)^2} - s.$$

La loi du mouvement des particules immobiles par rapport à l'onde sera :

$$(54) \qquad z + z_0 = \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{e^2 E^2} + c^2(t+t_0)^2} - \frac{m_0 c^2}{eE}.$$

2.3. MOUVEMENT DES ÉLECTRONS ENTRAINÉS PAR L'ONDE ET EN MOUVEMENT OSCILLANT PAR RAPPORT A ELLE. — Considérons deux groupes d'électrons, le groupe B qui se déplace avec la vitesse de l'onde et un groupe F dont la phase est voisine de B à un instant donné. Étudions tout d'abord le mouvement du groupe F par rapport au groupe B. Si φ_F et φ_B désignent les phases de ces groupes d'électrons, les équations de leur mouvement seront :

$$(55) \qquad \frac{d}{dt} m_L \frac{dz_F}{dt} = e E_{z_F},$$

$$(56) \qquad \frac{d}{dt} m_L \frac{dz_B}{dt} = e E_{z_B},$$

où m_L est la masse relativiste longitudinale :

$$m_L = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

F et B étant voisins et ayant des vitesses voisines, on a :

$$(57) \qquad \frac{d}{dt} m_L \frac{d(z_F - z_B)}{dt} = e(E_{z_F} - E_{z_B}).$$

En première approximation, on aura

$$E_{z_F} = E_{z_B} + (z_F - z_B)\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_B + \ldots.$$

En posant

$$z_F - z_B = U \qquad \text{et} \qquad \varphi_B = \omega\left(\frac{z_B}{v} - t\right),$$

$$(58) \qquad \frac{d}{dt} m_L \frac{dU}{dt} = e\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)_B U,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\omega}{v} E_0 \sin\omega\left(\frac{z}{v} - t\right) = -\frac{\omega}{v} E_0 \sin\varphi_B U,$$

$$(59) \qquad \frac{d}{dt}\left(m_L \frac{dU}{dt}\right) = -\frac{e\omega}{v} E_0 \sin\varphi_B U.$$

Nous étudierons ainsi le mouvement d'un électron voisin d'un électron de mouvement stable, ce qui revient à étudier le mouvement des électrons autour d'une position stable.

Pour résoudre l'équation (59), nous considérerons successivement :

1° m et $\frac{e\omega}{v} E_0 \sin(\varphi_B)$ comme constants, ce qui correspond à un guide accélérateur dans lequel la vitesse de phase de l'onde hyperfréquence est constante et éloignée des vitesses relativistes;

2° m constant et $\frac{e\omega}{v} E_0 \sin(\varphi_B)$ lentement variable, c'est-à-dire un guide accélérateur comme celui que nous employons, mais dans la partie relative aux vitesses éloignées de celle de la lumière.

3° m et $\frac{e\omega}{v} E_0 \sin(\varphi_B)$ lentement variables.

On supposera que E_0 est constant tout le long du guide.

a. Étude du mouvement relatif avec m et $\frac{e\omega}{v} E_0 \sin(\varphi_B)$ constants. — Le mouvement est déterminé par une équation de la forme :

$$m\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + cU = 0. \tag{60}$$

Cette équation n'est autre que l'équation du pendule. L'élongation est donnée par

$$U = z_0 \cos(\omega t - \varphi), \tag{61}$$

avec

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad \text{et} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Nous nous servirons de cette analogie pour décrire le mouvement. Nous prévoyons ainsi que lorsque l'écart de phase entre le groupe de phase stable B et le groupe mobile considéré reste faible, celui-ci est animé d'un mouvement oscillatoire de petite amplitude dont la fréquence est indépendante de celle-ci; c'est l'isochronisme des petites oscillations.

Lorsque l'amplitude augmente et que l'on accélère des électrons dont la phase initiale est éloignée de la phase des électrons stables B, le mouvement reste oscillatoire, la période n'est plus constante. Enfin lorsque cette amplitude augmente encore, on atteint une valeur pour laquelle l'électron après être passé par une position instable s'éloigne indéfiniment de l'électron stable (ceci correspond au cas de la rotation dans le pendule). Ainsi, si l'on injecte les électrons durant toute une période, c'est-à-dire si leurs phases initiales sont régulièrement distribuées sur un intervalle égal à 2π, il n'y en aura qu'un certain nombre qui seront accélérés et ils seront groupés autour de l'électron dont la phase initiale correspond à B.

b. Étude du mouvement relatif pour m constant et $\frac{e\omega}{v} E_0 \sin(\varphi_B)$ lentement variable. — Cette équation est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + f(t)U = 0. \tag{62}$$

Nous tenons compte maintenant de la variation de v le long du guide, ce qui introduit une fonction de $f(t)$ au lieu de la constante envisagée. Les équations de ce type ont été étudiées simplement par Jeffreys [13] à propos de l'équation de Schrödinger en faisant un certain nombre d'hypothèses restrictives sur $f(t)$. On admet essentiellement que $f(t)$ varie lentement avec t; la condition précise de lenteur apparaîtra au cours de la discussion.

Écrivons les solutions de la forme $U = e^{j\alpha(t)}$; $\alpha(t)$ doit être solution de

$$j\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2 + f(t) = 0, \tag{63}$$

Équation que nous résoudrons par approximations successives, en supposant que $\alpha(t)$ est une fonction lentement variable de t de façon à avoir

$$\alpha'' < \alpha',$$

la solution s'écrit :

$$\alpha = \pm\int_{t_0}^{t} \sqrt{f}\,\mathrm{d}t;$$

en substituant cette valeur dans l'équation (63) dans le terme $\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}$, on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2 = f(t) \pm j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f^{\frac{1}{2}}$$

et comme $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est petit vis-à-vis de f, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{f(t)} + \frac{1}{2}j\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{f(t)},$$

$$\alpha = \pm\int_{t_0}^{t}\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}j\log\sqrt{f(t)}, \tag{64}$$

d'où :

$$U = e^{j\alpha(t)}$$

$$= \frac{c}{f(t)^{\frac{1}{4}}}e^{\pm j\int_{t_0}^{t}\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t}.$$

En explicitant $f(t)$:

$$f(t) = \frac{e\omega}{m_L v} E_0 \sin(\varphi_B)$$

et en prenant la partie réelle, C et δ étant des constantes définies par les conditions initiales, on obtient :

$$(65)\quad U = \frac{C}{\left[\frac{e\omega}{m_L v} E_0 \sin(\varphi_B)\right]^{\frac{1}{4}}} \times \cos\left[\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{e\omega}{m_L v}} E_0 \sin(\varphi_B)\, dt + \delta\right].$$

Il est intéressant d'étudier les conditions de validité de l'hypothèse que nous avons faite. La condition est

$$\alpha'' \ll \alpha'^2, \qquad \text{soit} \quad \frac{\alpha''}{\alpha'^2} \ll 1, \qquad \text{soit} \quad \frac{d\frac{1}{\alpha'}}{dt} \ll 1 ;$$

en substituant à α', sa valeur obtenue dans la première approximation, on a :

$$\frac{d\frac{1}{\alpha'}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{f(t)}} \ll 1.$$

Négligeons la variation de m_L avec t et prenons les valeurs les plus défavorables pour l'inégalité dans un cas pratique typique :

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{f(t)}} = \frac{d}{dt}\frac{\sqrt{2 m_L v}}{\sqrt{e\omega E_0}} = \sqrt{\frac{2 m_0 c^2}{e E_0 \times 0{,}03\,\omega}}\,\frac{v}{c}\,\frac{d\sqrt{v}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{f(t)}} \# 2.10^{-19} \times \frac{dv}{dt}.$$

Si l'on admettait que les électrons sont accélérés depuis zéro à c dans le temps mis pour traverser l'accélérateur d'une façon linéaire, on aurait

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3.10^{10} \times 3\,000.10^{6}}{5} = 2.10^{19}.$$

Ainsi dans le cas le plus défavorable, nous avons supposé que l'amplitude des oscillations était égale à la longueur de l'accélérateur, l'expression est de l'ordre de 1 et dans les cas pratiques que nous envisagerons dans la suite on peut admettre que l'hypothèse faite mène à un ordre de grandeur acceptable du résultat $\left(\text{vitesse initiale, 20 kV; } \frac{v}{c} = 0{,}27 \text{ dans un cas et 80 kV, } \frac{v}{c} = 0{,}5 \text{ dans l'autre}\right)$.

L'équation (65) nous donne encore un mouvement oscillatoire autour de B; il n'est plus purement sinusoïdal, mais les phénomènes gardent l'allure générale que nous avons décrite précédemment :

L'amplitude des oscillations devient

$$C\left[\frac{e\omega}{m_L v} E_0 \sin(\varphi_B)\right]^{-\frac{1}{4}}$$

et leur fréquence instantanée :

$$\omega' = \left[\frac{e\omega}{m_L v} E_0 \sin(\varphi_B)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

c. Étude du mouvement relatif dans le cas général. — On considère maintenant la variation de m_L avec le mouvement : l'équation générale du mouvement est :

$$(66)\quad \frac{d}{dt} m_L \frac{dU}{dt} = -\frac{e\omega}{v} E_0 \sin\varphi_B U,$$

d'où en posant

$$(67)\quad \psi(t) = \frac{e\omega}{v} E_0 \sin\varphi_{(B)}$$

$$(68)\quad \frac{d}{dt} m_L \frac{dU}{dt} + \psi_{(t)} U = 0.$$

Nous utiliserons les mêmes procédés d'approximation que précédemment en supposant m_L lentement variable. Cherchons une solution de la forme :

$$(69)\quad \begin{cases} U = e^{j\alpha(t)}, \\ \frac{dU}{dt} = j\alpha'(t)\, e^{j\alpha(t)} ; \end{cases}$$

$\alpha(t)$ doit être solution de :

$$\frac{d}{dt} j m_L \alpha'(t)\, e^{j\alpha(t)} + \psi(t)\, e^{j\alpha(t)} = 0,$$

soit

$$(70)\quad j\alpha''(t) - \alpha'^2(t) + j\frac{m'_L}{m_L}\alpha'(t) + \frac{\psi(t)}{m_L} = 0.$$

Nous obtenons une équation de la même forme que l'équation (63) avec un terme supplémentaire $j\frac{m'_L}{m_L}\alpha'(t)$ qui fait intervenir la variation de la masse longitudinale durant le mouvement. La variation de ce terme est lente puisqu'on envisage le mouvement du groupe d'électrons autour de sa position moyenne.

Nous avons

$$\alpha'^2_{(t)} = \frac{\psi(t)}{m_L},$$

$$\alpha'_{(t)} = \sqrt{\frac{\psi(t)}{m_L}},$$

En substituant dans l'équation (70), nous obtenons

$$(71)\quad \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{(t)}}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{\psi(t)}{m_L}+j\frac{m'_L}{m_L}\sqrt{\frac{\psi(t)}{m_L}}+j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi(t)}{m_L}\right)^{\frac{1}{2}},$$

soit en faisant les approximations ordinaires :

$$(72)\quad \frac{\mathrm{d}\alpha_{(t)}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\psi(t)}{m_L}}+\frac{j}{2}\frac{m'_L}{m_L}+\frac{j}{4}\left[\frac{\left(\frac{\psi(t)}{m_L}\right)'}{\frac{\psi(t)}{m_L}}\right],$$

d'où

$$(73)\quad \alpha_{(t)}=\pm\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\psi(t)}{m_L}}\,\mathrm{d}t+\frac{j}{4}\operatorname{Log}\frac{\psi(t)}{m_L}+\frac{j}{2}\operatorname{Log}m_L$$
$$=\pm\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{\psi(t)}{m_L}}\,\mathrm{d}t+j\operatorname{Log}[\psi(t)m_L]^{\frac{1}{4}},$$

soit

$$(74)\quad U=e^{j\alpha(t)}=\frac{C}{[\psi(t)\,m_L]^{\frac{1}{4}}}\,e^{j\sqrt{\frac{\psi(t)}{m_L}}\,\mathrm{d}t+\delta},$$

C et δ étant des constantes d'intégration.

$$(75)\quad U=\frac{C}{\left[\frac{e\omega m_L}{v}E_0\sin\varphi_B\right]^{\frac{1}{4}}}\times\cos\left[\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{e\omega}{m_L v}E_0\sin(\varphi_B)}\,\mathrm{d}t+\delta\right].$$

Nous avons donc encore un mouvement oscillatoire autour de B. L'amplitude de ce mouvement est

$$(76)\quad C\left[\frac{e\omega m_L}{v}E_0\sin\varphi_B\right]^{-\frac{1}{4}},$$

$|\sin\varphi_B|$ restant toujours plus petit que 1 et E_0 étant maintenu constant tout le long de l'axe par construction, l'amplitude varie essentiellement comme

$$\left(\frac{m_L\omega}{v}\right)^{-\frac{1}{4}},\qquad \text{soit}\quad \left(\frac{m_L}{\lambda g}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

ou encore

$$\left[\frac{m_0\omega}{v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Nous voyons que l'*amplitude diminuera* au fur et à mesure que l'énergie augmentera et que v tendra vers c.

La fréquence des petites oscillations est :

$$(77)\quad \omega'=\left[\frac{e\omega}{m_L v}E_0\sin(\varphi_B)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left[\frac{e\omega}{m_0 v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}E_0\sin(\varphi_B)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Elle diminue lorsque la vitesse augmente et s'annulera pour $v=c$. Lorsque v s'approche de c, il est bien clair que tout mouvement oscillatoire devient impossible puisque l'électron ne peut jamais aller à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Pour 0,8 c et $E_0=30\,000$ V/cm, la fréquence des oscillations sera de l'ordre de 500 Mc/s.

2.4. Étude qualitative de l'entrainement des électrons dans le mouvement absolu. — Les études précédentes auraient pu nous fournir des renseignements sur ce point, si nous avions pu résoudre les équations originales du problème : il nous aurait alors suffit de déterminer les valeurs des paramètres initiaux (phase initiale de départ, vitesse initiale) qui donnent une amplitude infinie aux mouvements d'oscillations, ces valeurs auraient délimité les zones à l'intérieur desquelles doivent se trouver les paramètres initiaux pour que les électrons soient entraînés par l'onde; ces électrons sont naturellement caractérisés par une amplitude finie des oscillations étudiées au paragraphe précédent. Malheureusement, alors, nous avons dû abandonner toute solution rigoureuse du problème réel et nous contenter de raisonner sur des données simplifiées, nous avons résolu un problème « tangent » au problème réel. L'approximation n'est bonne qu'aux environs immédiats de la phase stable, par construction; là elle donne correctement l'amplitude et la période d'oscillation; au contraire, lorsqu'on s'éloigne des conditions valables pour le groupe de phase stable, les données des deux problèmes, le réel, et son image approchée s'écartent beaucoup et en particulier à la frontière des zones de stabilité, notre approximation ne vaut plus rien. Il faut alors avoir recours à un autre raisonnement : le calcul numérique du problème complet est possible, mais nous nous contenterons ici d'un raisonnement qualitatif, qui nous donne un ordre de grandeur acceptable de l'efficacité du dispositif; il faudrait évidemment recourir au calcul numérique détaillé si l'on voulait prévoir quantitativement la forme du spectre d'énergie obtenu.

Nous considérons donc maintenant le mouvement absolu des électrons par rapport à un référentiel fixe lié au guide accélérateur.

Nous négligeons encore les ondes qui n'ont pas une vitesse voisine de celle de l'électron puisqu'elles ont une influence moyenne nulle; elles produisent seulement des perturbations aux oscillations autour de la position moyenne des groupes d'électrons. Considérons alors le champ E_z (*fig.* 5). Examinons d'abord le cas simple où ce champ se déplace à une *vitesse de phase constante*, la position stable du groupe

d'électrons sera alors une position telle que D par rapport à la crête de l'onde, l'électron ayant à la fois la vitesse de l'onde et cette position, ne sera soumis à aucune force et conservera cette vitesse. Son mouvement est stable, car si nous le supposons retardé il prendra une position telle que D' par rapport à la crête de l'onde; il trouvera donc un champ accélérateur dont l'influence corrigera les effets de l'accident. Si inversement il est accéléré accidentellement, il passera en une position D'', où l'effet de l'onde sera de le retarder, donc encore de réparer l'accident. Cette position est stable, mais ce premier exemple est trop simple puisque l'électron se déplace d'un mouvement uniforme et ne subit aucune accélération. Un système de ce genre ne pourrait pas constituer un accélérateur.

Supposons maintenant que la vitesse de phase dans le guide soit variable suivant la loi — réalisable comme nous l'avons vu — qui oblige l'onde à accompagner les électrons uniformément accélérés. Dans ce cas, un groupe d'électrons pourra encore rester dans une position de phase stable par rapport à la crête de l'onde à condition qu'il possède une phase initiale comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, le zéro des phases étant compté à la crête positive de l'onde. Considérons donc une onde sinusoïdale telle celle que représente la figure 5 (E_0, champ maximum) pour laquelle la phase des groupes d'électrons en équilibre par rapport à l'onde accélératrice correspondra soit au point B, soit au point C. Il suffit pour cela que le champ constant E_1 choisi pour calculer le point accéléré du groupe stable soit inférieur à E_0 et soit représenté par l'ordonnée commune de B et C.

Étudions encore la stabilité de ces positions. Le raisonnement est le même que précédemment. En B, si l'électron acquiert une vitesse supérieure à celle de l'onde, il trouvera automatiquement un champ accélérateur plus faible et sera retardé par rapport aux électrons B. De même s'il est freiné, il trouvera un champ plus élevé et reprendra la position B qui est une position stable.

Au contraire C est à une position instable pour des raisons analogues :

En C si l'électron acquiert une vitesse supérieure à celle de l'onde, il se trouve dans un champ accélérateur plus élevé et sa vitesse augmente encore si bien qu'il s'éloigne de sa position initiale. De même s'il est freiné, il trouvera un champ plus faible et s'éloignera encore de C.

Nous pourrons donc choisir une position de phase stable quelconque comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la crête de l'onde hyperfréquence. Plus la position de phase stable sera voisine de la crête A et plus l'accélération sera élevée pour une même longueur, mais malheureusement aussi, moins nombreux seront les électrons entraînés.

Étudions, en effet, le mouvement des électrons dont la phase d'injection est différente de celle de B.

Nous avons vu précédemment qu'un groupe d'électrons voisins du groupe B aurait un mouvement oscillatoire autour de B lors du mouvement général de translation. Il existe donc un intervalle de phase pour lequel les électrons seront accélérés.

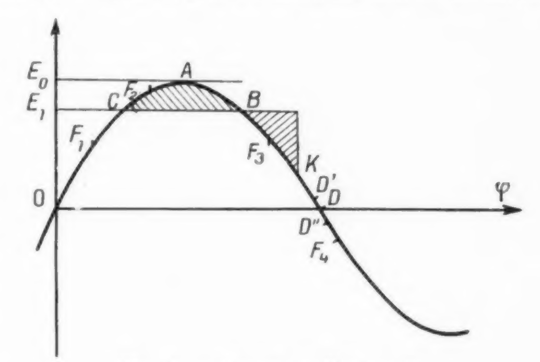


Fig. 5. — Champ accélérateur E .

Soit F un groupe d'électrons de ce genre; nous allons faire varier leur phase d'injection par rapport à celle de l'onde prise comme référentiel.

1° F entre o et C. Position F_1 : le groupe est dans un champ accélérateur inférieur à E_1, l'onde se déplace plus vite que lui et sa phase diminue; il est perdu.

2° F entre C et B. Position F_2 : le groupe est dans un champ accélérateur supérieur à E_1, il tend donc à aller plus vite que l'onde et sa phase relative par rapport à celle-ci augmentera en valeur algébrique. F se déplacera dans la direction de B.

Il est intéressant de déterminer la position maximum qu'occupera au delà de B le groupe d'électrons situé initialement en C.

Nous appellerons K le point limite qu'ils atteignent et qui joue un rôle important.

La force agissant sur le groupe d'électrons dans son mouvement relatif est $e\,(E_{\varphi F} - E_{\varphi B})$, elle est proportionnelle à la différence des ordonnées des points F et B sur la figure 5. Les abscisses étant proportionnelles aux déplacements réels, les aires limitées à la courbe, l'horizontale passant par B

et la verticale de F, seront proportionnelles au travail correspondant au mouvement relatif de F autour de B.

Dans les deux demi-oscillations, le travail étant le même, un groupe d'électrons F dont la phase initiale est légèrement supérieure à C atteindra une position K telle que les deux aires hachurées de la figure 5 soient égales.

En particulier, K sera déterminé en appliquant cette remarque au point C par la condition que les aires hachurées soient égales.

3° F entre B et K. Position F_3 : le groupe est dans un champ accélérateur inférieur à E_1, il perdra donc son avance de phase sur B et tendra vers B en effectuant un mouvement oscillatoire autour de B.

4° F au delà de K. Position F_4 : le groupe est encore dans un champ accélérateur inférieur à E_1, il perd son avance de phase en se rapprochant de B, mais la force de rappel est assez forte pour lui faire dépasser la position C, comme on le voit par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent. Il est alors dans un champ retardateur et est définitivement perdu pour l'onde.

Ainsi nous voyons que si nous réglons le guide accélérateur pour que l'onde accompagne les électrons B accélérés par le champ E_1, tous les groupes d'électrons dont la phase par rapport à l'onde est comprise entre φ_C et φ_K seront accélérés.

Il apparaît ainsi que plus E_1 sera faible et plus le nombre d'électrons accélérés sera grand.

Le but de notre appareil d'étude étant surtout d'obtenir des électrons accélérés à des valeurs élevées, nous avons choisi de prendre E_1 voisin de E_0.

E_1 étant déterminé, le mouvement des divers groupes d'électrons dont la phase est comprise entre φ_C et φ_K apparaît comme un mouvement de translation auquel se superpose un mouvement oscillatoire autour de leur position moyenne dont l'amplitude ira en diminuant au fur et à mesure que leurs énergies augmenteront, parce que la masse relativiste m_r augmente et qu'en conséquence les amplitudes diminuent. Si l'accélérateur est long, tous les groupes tendront vers une position telle que B par rapport à l'onde et l'accélération pourra être considérée comme celle d'un faisceau d'électrons à phase d'injection constante.

Dans notre réalisation qui est courte, le regroupement n'a pas le temps de se faire et l'on obtient à la sortie des électrons dont les énergies varient sur tout un intervalle : on observe un spectre d'énergie, comme nous le décrirons en détail par la suite.

3. Mouvement transversal des électrons.

3.1. Force défocalisatrice. — Nous n'avons jusqu'ici considéré que le mouvement axial des électrons en supposant qu'ils restaient au voisinage de l'axe, mais la présence d'un champ électrique et magnétique soumet les électrons à des forces radiales.

En appelant $\vec{B}$ le vecteur induction magnétique, nous avons

$$\vec{F} = e.\vec{E} + e.\vec{u} \wedge \vec{B}, \tag{78}$$

$\vec{u}$ étant la vitesse de l'électron, donc

$$F_r = e.E_r - euB_\theta. \tag{79}$$

Les champs E_r et B_θ sont donnés par les équations (80) et (81), où nous écrivons E_0 au lieu de A comme nous l'avons obtenu :

$$E_r = j\frac{\beta}{\chi}E_0 J_1(\chi r)e^{-j\beta z + j\omega t}, \tag{80}$$

$$B_\theta = \mu_0 H_\theta = \mu_0 j\frac{E_0}{\eta_0}\frac{k}{\chi}J_1(\chi r)e^{-j\beta z + j\omega t} \tag{81}$$

et comme $\frac{\mu_0}{\eta_0} = \frac{1}{c}$,

$$B_\theta = j\frac{1}{c}\frac{k}{\chi}AJ_1(\chi r)e^{-j\beta z + j\omega t}; \tag{82}$$

finalement en tenant compte des relations (5) entre β, χ et K :

$$B_\theta = \frac{v}{c^2}E_r. \tag{83}$$

Il en résulte

$$F_r = eE_r\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right). \tag{84}$$

Dans le cas où la vitesse de phase est égale à celle de l'électron comme nous le supposerons $u = v$

$$F_r = eE_r\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right], \tag{85}$$

E_r varie avec z; mais nous envisageons seulement son action sur les électrons B, qui se déplacent à la même vitesse que l'onde et ceux-ci se trouvent toujours soumis au même champ E_r, d'un bout à l'autre de leur trajectoire. Au premier ordre, les équations de Maxwell donnent :

$$E_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{86}$$

Pour les électrons B de phase stable, la figure 5 montre que l'on a toujours :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} < 0, \tag{87}$$

Ainsi lorsque les électrons ont une phase convenable pour être accélérés, nous aurons toujours une force défocalisante :

$$E_r > 0.$$

Autrement dit, la force radiale agissant sur des électrons accélérés les écarte toujours de l'axe, et cette loi est une conséquence directe de la condition $uv < c$; lorsque la vitesse commune de l'onde et des électrons se rapproche de c, la force défocalisante tend vers zéro.

3.2. CALCUL DU RAYON DU FAISCEAU D'ÉLECTRONS ACCÉLÉRÉS. — La force radiale F_r est proportionnelle à la distance radiale r comme le montre la formule :

$$F_r = eE_r\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

car au voisinage de l'axe on peut remplacer dans E_r, $J_1(\chi r)$ par $\chi\frac{r}{2}$ et $\frac{\omega}{v}$ par β, ce qui donne

$$F_r = eE_0\frac{\beta}{2}\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]\left[\sin\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]r. \tag{88}$$

Nous n'envisagerons que le mouvement des électrons stables (B) qui accompagnent l'onde dans son mouvement. Ils ne changent pas de position relativement à la crête de l'onde et $\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]=\varphi_0$ reste fixe. Le seul facteur variable avec z sera $\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$.

Si nous écrivons l'équation de la dynamique relativiste

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F,$$

nous nous contenterons d'une évaluation grossière de la défocalisation latérale, car cet effet est tout petit et pour l'intégration approchée nous remplacerons la vitesse variable v, par une valeur moyenne le long de l'accélérateur $\bar{v}$; nous obtiendrons ainsi une force moyenne F_r indépendante de z

$$F_r = hr, \qquad \text{avec} \quad h = \frac{eE_0\beta}{2}\left[1-\left(\frac{\bar{v}}{c}\right)^2\right]\sin\varphi_0. \tag{89}$$

Il lui correspond une énergie potentielle $U(r)$

$$U(r) = -\int F(r)\,\mathrm{d}r = -h\frac{r^2}{2}. \tag{90}$$

L'intégrale des forces vives dans le mouvement radial s'écrit, m_t étant maintenant la masse relativiste transversale :

$$m_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\frac{1}{2}m_t\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - h\frac{r^2}{2} = 0, \tag{91}$$

d'où

$$\left[\frac{\mathrm{d}(\log r)}{\mathrm{d}t}\right]^2 = \frac{h}{m_t}, \qquad r = r_0 e^{\sqrt{\frac{h}{m_t}}t}. \tag{92}$$

Le rayon r sera multiplié par e dans un temps

$$t_e = \left(\frac{m_t}{h}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2m_0}{eE_0\beta\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\sin\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{93}$$

On retrouve ainsi l'inverse de la pulsation ω' définie par l'équation (77) multipliée par $\sqrt{2}$. Nous avons vu que $f' = \frac{\omega'}{2\pi}$ était toujours très inférieur à la fréquence des oscillations hyperfréquence; $\frac{2\pi}{\omega'}$ est donc très grand devant la période haute fréquence, T, et comme le temps de parcours d'un accélérateur court n'est que d'une dizaine de périodes, on voit que le rayon variera peu.

Sur le petit parcours de notre accélérateur, avec un faisceau bien centré sur l'axe au début de l'accélération la focalisation latérale ne présente aucune difficulté; il est, au demeurant toujours possible et pratiquement commode d'annuler les faibles effets de ce champ défocalisant par un champ magnétique longitudinal.

3.3. CHAMP MAGNÉTIQUE FOCALISATEUR. — Si ce champ auxiliaire était seul, les électrons décriraient autour de l'axe une hélice de petit diamètre, la force de rappel étant proportionnelle à r. Il sera toujours possible de donner à cette force une valeur assez grande pour annuler et même surmonter largement l'action de F_r, donnée par l'équation (88).

En effet, si nous désignons par B la valeur de l'induction dans le champ focalisateur longitudinal, on obtient la force radiale totale G_r en ajoutant à la force $F_r = -hr$, due au champ de haute fréquence, la force due au champ de focalisation dont l'expression classique est $f_r = eBr\theta'$

$$G_r = -eBr\theta' + hr. \tag{94}$$

Cette force doit équilibrer la force centrifuge $m_t r\theta'^2$,

car dans les mouvements transversaux, l'équation de la dynamique relativiste s'écrit simplement :

$$m_t \gamma_r = G_r,$$

γ_r étant l'accélération transversale. On obtient donc l'équation

(95) $$-eBr\theta' + hr + m_t r \theta'^2 = 0,$$

où le facteur commun r s'élimine, et qui, résolue en θ' donne :

(96) $$\theta' = \frac{eB}{2m_t} \pm \sqrt{\left(\frac{eB}{2m_t}\right)^2 - \frac{h}{m_t}}.$$

La projection du mouvement sur un plan de front sera un cercle comme dans le cas purement statique si la racine θ' est constante et réelle; il faut donc que B satisfasse à l'inégalité

(97) $$\frac{eB}{2m_t} > \sqrt{\frac{h}{m_t}},$$

étant entendu que m_t, lentement variable est considéré comme approximativement constant. $\frac{eB}{m_t}$ est la pulsation correspondant à la fréquence gyromagnétique caractéristique du champ focalisateur : elle est d'environ 3 Mc/s par gauss, tant que m_t ne diffère pas trop de la masse au repos, m_0; d'autre part, $\left(\frac{m_t}{h}\right)^{\frac{1}{2}} = t_c$, équation (93). On obtient.

$$2\pi f_B > \frac{2}{t_c}$$

et comme

$$\frac{1}{t_c} = \frac{\omega'}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f'}{\sqrt{2}},$$

f' étant la fréquence des oscillations des électrons voisins de la position stable

(98) $$f_B > \sqrt{2} f'.$$

Nous avons vu que la fréquence des oscillations longitudinales f' tendait vers zéro lorsque v tendait vers c. La focalisation sera donc d'autant plus facile que la vitesse des particules approchera de c. Dans les régions initiales où v est faible, la valeur minimum admissible pour le champ focalisateur B_z sur l'axe sera égale à

(99) $$B_{z\,\text{gauss}} = 0{,}45 \frac{f}{3}$$

en exprimant f en Mc/s. Nous avions obtenu comme ordre de grandeur de f : $500 . 10^6$ c/s, ce qui montre qu'il suffira d'appliquer des champs B de l'ordre de 250 gauss, ce qui est facile.

Lorsque cette condition sera remplie, le faisceau d'électrons conservera approximativement la même section d'une extrémité à l'autre de l'accélérateur.

Il apparaît ainsi possible d'accélérer des électrons dans un accélérateur linéaire d'une façon stable et de les obtenir dans un faisceau étroit à la sortie, ce que l'expérience nous a permis de vérifier sur notre appareil.

Nous étudierons dans la deuxième partie de cet exposé le calcul du guide accélérateur.

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. B. Mullet, *A resonator accelerator with a rectangular corrugated guide* (*T. R. E. Report*, t. 2021).

[2] W. E. Willshaw, *Confidential report from research labs of General Electric Co Ltd* n° 8766 B (1945).

[3] G. G. Bruck et E. R. Wicker, *Slow transverse magnetic waves in cylindrical guides* (*J. Appl. Phys.*, t. 18, 1947, p. 766).

[4] S. Frankel, TM_{01} *mode in circular waveguides with two coaxial dielectrics* (*J. Appl. Phys.*, t. 18, 1947, p. 650).

[5] L. Brillouin, *Waveguides for slow waves* (*J. Appl. Phys.*, t. 19, 1948, p. 1023).

[6] E. L. Chu et W. W. Hansen, *The theory of disk-loaded waveguides* (*J. Appl. Phys.*, t. 18, 1947, p. 996).

[7] E. L. Chu et W. W. Hansen, *Disk loaded waveguides* (*J. Appl. Phys.*, t. 20, 1949, p. 280).

[8] P. Grivet et J. Vastel, *Quelques mesures sur un accélérateur linéaire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 809).

[9] Jammke Emde, *Tables of higher functions*, 4e édition, p. 262-263 (Teubner, Leipzig, 1948).

[10] W. Walkinshaw, *Notes on Waveguides for show waves* (*J. Appl. Phys.*, t. 20, 1949, p. 634).

[11] L. Lewin, *Advanced theory of Waveguides* (London, Iliffe and Sons, 1951).

[12] K. Johnsen, *Heavy Beam Loading in Linear electron accelerator* (*Proc. Phys. Soc.* B, t. 64, p. 1062, 1951).

[13] H. Jeffreys, *Method of mathematical physics* (Cambridge, Univ. Press, 1946).

SPECTRE DE PUISSANCE
D'UN OSCILLATEUR NON LINÉAIRE PERTURBÉ PAR LE BRUIT

PAR AUGUSTIN BLAQUIÈRE.

SOMMAIRE. — *L'effet du bruit de fond sur le régime d'un auto-oscillateur produit à la fois des fluctuations de fréquence et d'amplitude du signal. Le premier effet a fait l'objet d'un précédent Mémoire* [2] *et l'auteur examine ici le second, les fluctuations d'amplitude.*

Il est commode de décomposer le bruit naturel en un bruit cohérent avec le signal théorique et un bruit incohérent. Seul le bruit incohérent influe en effet notablement sur l'amplitude du signal, ce qui conduit à faire intervenir seulement ce bruit incohérent dans l'évaluation du rapport $\frac{signal}{bruit}$.

Le spectre de puissance du bruit est obtenu, et l'on vérifie que le principal facteur dont il dépend est la constante de temps τ *de l'oscillateur. L'évaluation de* τ *en fonction des paramètres du circuit donne donc les conditions pour lesquelles la puissance de bruit est minimum. Elles se résument ainsi :*

a. Grande amplitude de régime, sans introduire toutefois trop d'harmoniques

b. Phase de la réaction très lentement variable avec la fréquence.

(C. D. U. 621.396.615.)

SUMMARY. — *The effect of background noise on the operating conditions of a self-oscillator produces both frequency and signal amplitude fluctuations. The former effect was dealt with in a previous Note* [2] *and the author here examines the latter, the amplitude fluctuations.*

It is convenient to decompose natural noise into a noise coherent with the theoretical signal and into a non-coherent noise. Non-coherent noise alone has an appreciable effect on signal amplitude; this leads to taking into account only this non-coherent noise in evaluating $\frac{signal}{noise}$ *ratio.*

The noise power spectrum is obtained and it is shown that its principal factor is the oscillator time constant τ. *Evaluation of* τ *in function of circuit parameters thus gives the conditions for which noise power is a minimum. They can be resumed as follows :*

a. Operating conditions at high amplitude, but without introduction of too much harmonics.

b. Feedback phase varying very slowly with frequency.

(U. D. C. 621.396.615.)

I. — INTRODUCTION.

EFFETS NÉFASTES DU BRUIT DE FOND DES AUTOOSCILLATEURS

a. INSTABILITÉ DE FRÉQUENCE. — Dans un premier exposé [2], nous avons vu que le bruit de fond perturbe de façon irrégulière la fréquence du signal émis par un oscillateur. Cet effet n'est gênant que lorsqu'on cherche à obtenir une oscillation de fréquence extrêmement bien définie. C'est le cas pour tous les oscillateurs exceptionnellement soignés, tels que les horloges radioélectriques, les maîtres oscillateurs des émetteurs de radiodiffusion, etc.

Nous avons étudié les facteurs dont dépend l'instabilité de fréquence due au bruit afin d'essayer de la réduire, et nous avons pu évaluer quantitativement sa grandeur en fonction des paramètres des circuits.

Il est apparu alors que la stabilité de fréquence

est très variable suivant la façon dont est appliquée la réaction qui assure l'entretien. Si la phase de cette réaction est juste égale à $\frac{\pi}{2}$, cas théorique irréalisable en toute rigueur, les écarts de marche sont minima. Ils atteignent dans ce cas une limite thermodynamique indépendante des qualités du système choisi.

En pratique la phase φ de la réaction diffère toujours de $\frac{\pi}{2}$ et la stabilité de fréquence dépend beaucoup du schéma de l'oscillateur. Elle est toujours très inférieure à la limite thermodynamique.

Le rôle de la réaction apparaît clairement dans l'équation générale d'oscillation dont nous rappellerons la forme dans la suite [équat. (3)], car elle nous servira ici de point de départ.

b. Instabilité d'amplitude. — L'instabilité de fréquence n'est cependant pas la seule manifestation du bruit. Elle est toujours accompagnée d'une fluctuation de l'amplitude du signal dont les conséquences ne sont pas moins graves dans de nombreux domaines, en dehors de la mesure des temps et des fréquences. Les deux effets sont distincts. L'instabilité d'amplitude et l'instabilité de fréquence sont en effet deux phénomènes de nature différente au même titre que la modulation en amplitude et la modulation en fréquence d'un signal donné. C'est pourquoi nous les avons examinés séparément.

Précisons nettement le nouveau problème :

On a pris l'habitude de traiter indépendamment le signal et le bruit. Par exemple, on étudie couramment les opérations classiques : amplification, transmission, redressement, effectuées sur un « signal + bruit » initial. On caractérise l'onde obtenue en évaluant son taux de bruit sous la forme d'un rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$. On juge les qualités d'un quadripôle par sa « figure de bruit » définie par le rapport plus compliqué $\frac{\text{signal sur bruit de sortie}}{\text{signal sur bruit d'entrée}}$.

Cette façon de procéder est le plus souvent légitime, mais il peut aussi arriver que la source n'émette pas un signal et un bruit nettement distincts; c'est ce qui se produit ici. La source peut introduire à l'origine des mélanges plus ou moins compliqués du signal et du bruit. C'est ce qui a lieu lorsque l'oscillateur qui produit le signal fonctionne dans des conditions non linéaires, et c'est toujours le cas en régime stabilisé.

On peut néanmoins, lorsque le bruit est très faible à côté du signal, se ramener à une superposition bruit + signal, mais il faut prendre certaines précautions, que nous expliciterons, si l'on veut utiliser le formalisme classique. Il faut alors considérer que le bruit qui se superpose au signal n'est plus le bruit pur initial, mais un bruit conventionnel produit par l'interaction signal-bruit. Le bruit conventionnel qui entre dans le rapport classique $\frac{S}{B}$, définissant l'apport de la source, s'obtiendra en comptant dans B seulement le bruit incohérent avec S, et en négligeant le composant périodique de bruit, cohérent avec le signal :

Dans les mesures radioélectriques, ce composant périodique cohérent est indiscernable du signal. Il semble difficile d'imaginer des expériences mettant son existence, ou ses variations, en évidence. Il est, en effet, très faible et les facteurs de son intensité agissent aussi sur l'intensité propre du signal. Les méthodes actuelles ne semblent pas assez précises pour qu'on puisse espérer séparer les deux effets.

Il serait long de donner dans cette introduction les grandes lignes des méthodes suivies. Indiquons seulement que nous ferons appel à un procédé qui s'avère ici très puissant : la décomposition du bruit par la méthode de Rice. Nous verrons que l'un des composants de Rice seulement garde l'empreinte du signal tandis que l'autre conserve son individualité.

Passons maintenant aux applications pratiques. Elles sont nombreuses et nous ne pourrons en donner qu'un très bref aperçu.

c. Application a la modulation en fréquence d'une onde porteuse. — On sait que la transmission d'une information par radio est effectuée couramment par modulation d'une onde porteuse produite par un oscillateur auxiliaire. Deux procédés sont employés : la modulation en amplitude et la modulation en fréquence.

Le bruit de fond introduit toujours une perte d'information, aussi y a-t-il intérêt à rechercher les montages qui l'éliminent, mise à part l'étude des signaux les plus appropriés (modulation codée par exemple). On est naturellement conduit à évaluer le bruit à la source introduit par l'oscillateur; ce bruit initial se retrouvera ensuite à tous les étages. Ce fait, qui est bien clair dans la modulation d'amplitude est encore vrai dans la modulation de fréquence.

Un exemple élémentaire le montrera, c'est celui d'une onde porteuse sinusoïdale de fréquence ω, modulée à la fréquence ω_m avec l'indice de modula-

tion m. Si m est assez petit, l'onde porteuse ω_s est accompagnée seulement des deux raies satellites $\omega_s - \omega_m$ et $\omega_s + \omega_m$.

Ces trois raies se détachent sur une bande continue de bruit de largeur $\Delta\omega$, et le signal résultant est redressé au moyen d'un détecteur (à loi quadratique, par exemple). Le passage dans cet organe non linéaire donne un fondamental de fréquence ω_m entaché de bruit. Le carré moyen du bruit de sortie provient de mélanges divers : mélanges des composants de bruit de la bande initiale entre eux, de ces composants avec la raie ω_m et aussi avec les satellites $\omega_s - \omega_m$ et $\omega_s + \omega_m$.

Le problème se complique si l'indice de modulation m a une valeur notable car les raies satellites deviennent alors nombreuses.

Pour les faibles valeurs de m les résultats sont analogues à ceux que l'on obtient dans la modulation d'amplitude. En particulier, pour une bande de bruit d'entrée rectangulaire, le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ de sortie est [8]

$$\frac{m^2 x_0^2}{\frac{1}{2} + x_0\left(1 + \frac{1}{2} m^2\right)}$$

(dans le cas de la modulation en amplitude, m représente la profondeur de modulation), x_0 étant le rapport $\frac{\text{signal (onde porteuse)}}{\text{bruit d'entrée}}$ (1). Le cas d'une modulation profonde a été examiné récemment en détails [9] et mène à des résultats analogues. Il en irait encore de même pour les autres méthodes de modulation, par exemple, celles qui mettent en jeu des impulsions.

Nous verrons que le problème actuel est plus compliqué, car la bande de bruit dont nous disposons à l'entrée n'est pas rectangulaire, de plus le signal lui-même n'est pas une raie parfaitement mince.

d. Application a la résonance nucléaire. — Un autre exemple simple d'application est fourni par les appareils de détection de la résonance paramagnétique nucléaire. Dans ce cas, l'onde porteuse de pulsation ω_s est modulée par le signal nucléaire. Elle est aussi modulée en amplitude et en fréquence par le bruit de l'oscillateur, source de la porteuse. Ce bruit peut être considérablement réduit par l'emploi de ponts, mais cette méthode complique le dispositif expérimental en introduisant des éléments dont le réglage est délicat. Il serait plus commode de les supprimer en réduisant le plus possible le bruit de l'auto-oscillateur.

Appelons m la profondeur de modulation due au signal nucléaire, en général très petite, et supposons qu'à la sortie du pont on observe le rapport signal sur bruit $\frac{S}{B_{p'}}$. Si l'on supprime la branche de compensation du pont, laissant le reste du montage inchangé, on observe (les ajustements nécessaires étant faits) un nouveau rapport $\frac{S}{B_1}$. S n'a pas changé, mais B_1 est supérieur à B_p parce qu'une fraction du bruit de l'oscillateur s'ajoute au bruit du circuit (divisé par 2); on a

$$B_1 = \frac{B_p}{2} + \frac{S}{m A_0} B_s.$$

$\frac{S}{m}$ étant l'amplitude de la porteuse aux bornes du circuit du demi-pont et A_0 l'amplitude de la source.

B_s pourra être calculé commodément par nos formules en remarquant qu'en général, les amplificateurs utilisés sont très sélectifs, beaucoup plus que le circuit d'entrée. En conséquence, la puissance de bruit sera le plus souvent limitée par la bande passante de l'amplificateur et non par celle du circuit d'entrée.

e. Application au changement de fréquence. — La réception d'une onde porteuse, de fréquence f_s élevée, est le plus souvent effectuée par la méthode hétérodyne. On fait battre le signal donné avec un signal, lui aussi sinusoïdal, de fréquence voisine f, produit par un oscillateur local.

Les battements sont ensuite redressés au moyen d'un détecteur qui donne un courant de fréquence $f_s - f$. On a donc changé en définitive la fréquence initiale f_s en lui faisant subir une translation qui l'a ramené dans la bande du récepteur.

Évidemment les termes de bruit qui entourent la raie porteuse subissent la même translation et se retrouvent au voisinage de la raie $f_s - f$. Cette opération est linéaire et ne semble introduire aucune difficulté théorique, néanmoins elle introduit le bruit de l'oscillateur local. Ce bruit peut être éliminé en montant l'organe mélangeur, lampe ou cristal, suivant le schéma dit en « pont » ou « équilibré » [10] qui élimine le bruit de fond apporté par l'hétérodyne, et supprime ainsi le seul défaut de ce montage par rapport au récepteur direct.

(1) Cette formule est établie par R. E. Burgess [8] dans le cas d'une modulation en amplitude de l'onde porteuse, mais elle reste valable pour une modulation en fréquence à condition que l'indice de modulation soit faible.

En ondes ordinaires, la complication du montage symétrique est moins grande qu'en ondes centimétriques; les « tés magiques » ou « modulateurs en anneaux » sont très sensiblement plus compliqués que le montage direct. Il est alors d'un grand intérêt de réduire le bruit de fond de l'auto-oscillateur.

f. Application aux oscillateurs klystron. — La plupart des problèmes classiques concernant les ondes radioélectriques usuelles se rencontrent aux fréquences centimétriques, et les solutions qu'on leur apporte sont généralement la transposition, dans le domaine des ondes très courtes, des méthodes de la radioélectricité conventionnelle. Les circuits oscillants sont remplacés par des cavités, les lignes à propagation par des guides, les ponts par des assemblages convenables de « té » magiques et les détecteurs par des cristaux. Malheureusement, en ondes centimétriques, les tubes employés apportent un bruit considérable. Notre théorie pourra être utile à deux points de vue :

1° Elle s'applique intégralement au klystron si l'on néglige le bruit apporté par le tube lui-même; elle permet, dans ce cas, de préciser les conditions de réglage propres à assurer la production de bruit minimum.

2° Lorsque le bruit propre au tube d'entretien sera mieux connu, il sera utile de compléter notre étude en discutant le rôle de cette source qui est négligeable, nous l'avons montré, pour les lampes ordinaires. Nous nous contenterons d'indiquer ici qu'il faudrait que le bruit propre du klystron soit $\frac{Q^2 r}{R_l}$ fois plus grand que le bruit d'une lampe ordinaire, employant le même circuit, pour que le bruit intervienne notablement (r, Q, résistance-série et coefficient de surtension du circuit oscillant; R_l résistance de bruit équivalente à la lampe).

Nous voyons donc, en définitive, que le bruit propre des oscillateurs intervient dans de nombreux domaines. Cependant, si les travaux concernant la transmission, la détection, l'amplification, etc. du bruit sont très nombreux, il semble, au contraire, qu'il y en ait assez peu touchant le bruit émis par la source. On se contente généralement d'admettre que ce dernier est une bande rectangulaire limitée en largeur par le système sélectif d'entrée, or le problème de base est plus compliqué.

Le seul Mémoire récent publié sur cette question, dont nous ayons connaissance, est dû à R. M. Lerner [4]. Les hypothèses admises par cet auteur nous semblent cependant trop particulières pour décrire correctement les oscillateurs courants. En effet, dans ce travail, l'oscillateur est représenté par un amplificateur linéaire très sélectif dont l'entrée serait le bruit et la sortie le signal, et l'auteur ne fait pas intervenir significativement le manque de linéarité des montages normaux. Dans cet exposé, nous nous efforcerons d'être plus complet en admettant que l'oscillateur est *auto-entretenu*, et que son amplitude se trouve limitée par la courbure des caractéristiques du montage. Nous déterminerons alors la « dégradation » que fait subir la réaction au spectre de bruit rectangulaire initial.

OSCILLATEURS LINÉAIRES ET OSCILLATEURS NON LINÉAIRES. LOI FRÉQUENCE-AMPLITUDE.

On sait que les mouvements pendulaires sont de deux sortes : les mouvements pendulaires vrais dont la fréquence est indépendante de l'amplitude, et les mouvements pendulaires approchés dont la fréquence dépend de l'amplitude.

Les premiers sont généralement régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_0 \frac{dx}{dt} + c_0 x = 0. \tag{1}$$

Les seconds, par une équation de même forme mais à coefficients dépendant de la variable x. Tant que x reste assez faible, ces coefficients peuvent être remplacés par des développements limités et l'équation devient

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)\frac{d^2 x}{dt^2}\\ + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots)\frac{dx}{dt}\\ + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)x = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Nous dirons aussi que les oscillateurs du premier type sont *linéaires* et que les oscillateurs du second type sont *non linéaires*.

Suivant les valeurs des coefficients, les oscillations seront amorties ou auto-entretenues. Seul ce dernier cas d'ailleurs nous intéressera par la suite. Si, par exemple, a_0 et c_0 sont positifs et b_0 négatif l'oscillation pendulaire vraie décrite par l'équation (1) voit son amplitude croître exponentiellement. C'est l'un des exemples les plus simples d'oscillation auto-entretenue : on dit qu'il y a entretien par résistance négative.

On vérifie rapidement que la fréquence est rigidement liée aux coefficients de l'équation et que

par suite, elle est parfaitement indépendante de l'amplitude.

Un exemple non linéaire est fourni par une loi du type de van der Pol :

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_0(1 - b_2 x^2)\frac{dx}{dt} + c_0 x = 0,$$

a_0, c_0 et b_2 positifs, b_0 négatif; on sait que l'oscillation qu'elle décrit est auto-entretenue et que son amplitude, au lieu de croître indéfiniment comme précédemment, se stabilise pour une valeur a_s. La fréquence est variable avec l'amplitude puisque l'un des coefficients auxquels elle est liée, $b_0(1 - b_2x^2)$, dépend de x donc de l'amplitude. Cependant, à la stabilisation, le terme $1 - b_2x^2$ est en moyenne nul et il ne reste plus alors que les coefficients constants a_0 et c_0. On voit donc que la fréquence dépend très peu de l'amplitude au voisinage de a_s et que, par suite, un écart d'amplitude au voisinage de cette valeur n'entraînerait aucune variation sensible de la fréquence.

Si l'on concrétise l'équation de van der Pol ci-dessus, en se reportant, par exemple, au type d'oscillateur de la figure 1, on voit que cette dernière doit être écrite :

$$LC \frac{d^2 V}{dt^2} + (MS_0 + rC + 3MbV^2)\frac{dV}{dt} + V = 0.$$

(b est ici le coefficient de courbure de la caractéristique « courant plaque-tension grille » de la lampe d'entretien, représentée par le développement habituel $i_p = S_0 V + bV^3$. La signification des autres lettres est indiquée sur le schéma.)

Coefficient de dépendance fréquence-amplitude μ. — En fait, le couplage d'entrée ne se réduit jamais à une mutuelle pure, et, pour rendre compte des cas réels, il est commode de considérer M, dans l'équation précédente, comme un nombre complexe. Cela traduit le fait que la phase de la réaction n'est jamais juste égale à $\frac{\pi}{2}$. La non-linéarité ne s'introduit plus alors seulement dans le terme résistant, mais intervient aussi dans les autres termes.

Cela conduit à compliquer légèrement l'équation de van der Pol et à la remplacer par la forme plus générale :

$$(3)\quad LC \frac{d^2 V}{dt^2} + (MS_0 + rC) \times \left[1 + \frac{3Mb}{MS_0 + rC} V^2\right]\frac{dV}{dt} + (1 + \mu V^2)V = 0.$$

Il est facile de préciser la valeur du paramètre μ dans chaque cas particulier ([2]). On vérifie alors aisément que la fréquence est liée à l'amplitude par la relation

$$f = f_0\left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{a^2}{a_s^2}\right)^2 + \frac{3\mu}{8} a^2\right],$$

a, amplitude d'oscillation;

a_s, amplitude stabilisée;

$\varepsilon = -\frac{MS_0 + rC}{2\sqrt{LC}}$.

Au voisinage de la stabilisation, cette loi de dépendance se réduit à

$$(4)\qquad f = f_0\left[1 + \frac{3\mu}{8} a^2\right],$$

μ est un paramètre commode pour caractériser la sensibilité fréquence-amplitude de l'oscillateur stabilisé.

Temps de réaction τ *de l'oscillateur.* — Un autre paramètre important, qui interviendra dans la détermination de la puissance de bruit, est le temps de réaction τ de l'oscillateur. Si l'on suppose que l'oscillateur précédent soit déplacé de son état d'équilibre stable, il y revient exponentiellement avec la constante de temps τ. L'oscillateur stabilisé en amplitude va donc se comporter, vis-à-vis des chocs qui lui sont infligés par la source de bruit, un peu comme un pendule amorti classique. On sait que l'effet du bruit sur un tel pendule est d'autant plus néfaste que ce dernier est moins amorti, et l'on prévoit que plus τ sera grand et plus l'auto-oscillateur sera *bruyant*.

La discussion des qualités d'un oscillateur fera donc intervenir τ et μ, le premier de ces paramètres permettant, comme nous l'avons vu, de classer les oscillateurs d'après leur stabilité de fréquence, et le second d'après leur stabilité d'amplitude.

REPRÉSENTATION « COMPLÉMENTAIRE » DE LA PRÉCÉDENTE. POINT-IMAGE DE L'OSCILLATEUR SUR LE PLAN COMPLEXE.

Il est souvent commode de considérer un oscillateur comme un amplificateur refermé sur lui-même, la sortie étant convenablement couplée à l'entrée. On est alors amené à examiner séparément le « gain » G de l'étage amplificateur et l'« atténuation » β du circuit passif de couplage.

([2]) Des exemples ont été donnés dans les *Annales de Radioélectricité*, t. 8, 1953, p. 36.

Il serait long de redéfinir ici ces grandeurs, d'autant qu'un résumé un peu détaillé de cette question a été donné précédemment dans le *Journal de Physique et le Radium* [1]. Signalons seulement que deux points de vue peuvent être adoptés : on peut se représenter G et β comme des grandeurs complexes G_i et β_i et exprimer l'équation de la boucle sous la forme

$$G_i \beta_i = 1 \qquad \text{ou} \qquad 1 - \beta_i G_i = 0,$$

$\beta_i G_i$ est le gain complexe total de la boucle.

On peut aussi donner de G et β une représentation « complémentaire » sous forme d'opérateurs G_{op} et β_{op}, auquel cas on se ramène à l'équation différentielle du paragraphe précédent, écrite sous la forme symbolique

$$(1 - \beta_{op} G_{op})\, x = 0.$$

L'emploi des imaginaires donne une solution plus concrète des problèmes touchant les oscillateurs et, dans les cas où les calculs deviennent trop compliqués, on peut toujours s'appuyer sur les données de l'expérience pour compléter la théorie. On pose $1 - \beta_i G_i = H_i$ et l'on représente sur le plan complexe l'image de H_i : point-image de l'oscillateur.

Diagramme de Nyquist. — En fait, pour un oscillateur linéaire, β_i, G_i, et par suite H_i, ne sont parfaitement définis que si l'on connaît la fréquence f de l'oscillation qui s'établit. Dans ces expressions f joue le rôle d'un paramètre que l'on peut faire varier à volonté tandis que le point-image correspondant décrit une courbe : le diagramme de Nyquist de l'oscillateur.

En particulier, l'examen du diagramme de Nyquist indique tout de suite si l'oscillateur est amorti ou auto-entretenu. En effet, dans le premier cas le diagramme de Nyquist laisse l'origine à l'extérieur de sa boucle (le gain total βG est inférieur à 1) et enveloppe l'origine dans le second cas (gain βG supérieur à 1).

Le cas intermédiaire théorique où la boucle passerait par l'origine traduirait un équilibre indifférent (gain βG rigoureusement égal à 1).

Diagramme de Nyquist mobile. — Pour les oscillateurs non linéaires, l'introduction d'un second paramètre, l'amplitude a, nous a conduit à généraliser la représentation de Nyquist et à lui substituer une courbe déformable pouvant se trouver initialement dans l'un ou l'autre des trois cas ci-dessus.

Dans un état voisin de la stabilisation, le gain βG peut en effet être *inférieur ou supérieur à* 1 suivant que l'amplitude est supérieure ou inférieure à a. *Dans les deux cas, l'oscillateur évolue de telle sorte que le gain tende vers l'unité; le diagramme mobile vient se placer de lui-même dans les conditions requises. A la limite, il passe par l'origine et le gain total* βG *est alors égal à* 1 *en moyenne sur un cycle.*

L'emploi du diagramme mobile permet de déterminer aisément la valeur de l'amplitude et de la pulsation en régime stabilisé, ainsi que le temps de réaction τ. Ses propriétés rendent compte aussi de la dépendance fréquence-amplitude [1] et il sera commode d'utiliser, suivant le cas, la méthode par imaginaires ou la méthode complémentaire par équation différentielle.

II. — L'EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LE RÉGIME D'OSCILLATION.

Un auto-oscillateur n'est jamais en régime permanent, il subit en réalité de petites fluctuations par rapport à son état moyen. Dérangé de son état de régime théorique par une petite impulsion, il y revient avec la constante de temps τ. (On peut calculer τ à partir des données du circuit oscillant et de la caractéristique de la lampe d'entretien.) L'oscillateur doit donc se comporter *à peu près* comme un pendule amorti de constante de temps τ.

Les fluctuations thermiques, source de petites impulsions aléatoires qui représentent la perturbation naturelle et ultime du fonctionnement normal ont deux origines : la résistance ohmique du circuit et l'effet de grenaille de la lampe d'entretien.

Nous avons fait la théorie complète de ces deux effets [2], elle montre qu'en général l'effet de la lampe est négligeable. Nous ne donnerons pas cette démonstration ici par souci de clarté, et nous supposerons par la suite la lampe parfaite.

D'autre part, deux cas distincts ont été mis en évidence au début : celui où la phase de la réaction est juste égale à $\frac{\pi}{2}$, et qui apparaît comme une limite théorique; et celui où la phase de la réaction diffère de $\frac{\pi}{2}$ qui traduit mieux la réalité. Nous traiterons séparément ces deux cas en commençant par le plus simple. Les oscillateurs réels peuvent cependant s'en rapprocher suffisamment pour qu'il ne soit pas dépourvu d'intérêt malgré son aspect théorique.

Fluctuations d'amplitude et de phase. Puissance de bruit. — Il est bon d'établir aussi une distinction préalable entre les propriétés du premier ordre du bruit et les propriétés du second ordre. Précisons ce que nous entendons par là :

Le bruit qui se superpose au signal, supposé très faible à côté de ce dernier, entraîne des fluctuations de son amplitude et de sa phase dont nous étudierons les propriétés statistiques. On peut néanmoins se placer d'abord à un premier point de vue qui consiste à supposer connu un oscillogramme de bruit, émis par la résistance génératrice entre un instant zéro et un instant t^*, et à déterminer les variations de l'amplitude et de la phase du signal qui lui correspond de zéro à t^*.

On vérifie aisément que l'on obtient ces variations avec une approximation suffisante en considérant le bruit comme infiniment petit par rapport au signal, et en se limitant au premier ordre.

Il faut, néanmoins, reconsidérer entièrement le problème lorsqu'on cherche à déterminer la puissance moyenne de bruit. En effet, des infiniment petits du second ordre qui passaient inaperçus dans la première étude peuvent avoir maintenant une moyenne finie. Au contraire, des infiniment petits qui étaient du premier ordre dans le premier problème auront de leur côté une moyenne nulle.

Pour fixer les idées donnons une image simple, dont on verra plus loin l'analogie avec le cas étudié :

Soit une grandeur Y formée par la somme des termes Y_0, ε_1, ε_2^2, où ε_1 et ε_2^2 sont des infiniment petits du premier et du second ordre par rapport à Y_0, variables de façon aléatoire sur un ensemble d'expériences, avec $\overline{\varepsilon_1} = 0$.

Pour une expérience donnée, on a

$$Y = Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2.$$

Considérant ε_2^2 comme négligeable à côté de ε_1, on peut écrire

$$Y \sim Y_0 + \varepsilon_1.$$

Déterminons ensuite le carré moyen de Y pour l'ensemble des expériences considérées. On a

$$\overline{Y^2} = \overline{(Y_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2)^2}$$
$$= Y_0^2 + 2Y_0\overline{\varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_1^2} + 2Y_0\overline{\varepsilon_2^2} + 2\overline{\varepsilon_1\varepsilon_2^2} + \overline{\varepsilon_2^4}$$

ou, en première approximation, en négligeant $\overline{\varepsilon_2^4}$ et $\overline{\varepsilon_1\varepsilon_2^2}$:

$$\overline{Y^2} = Y_0^2 + 2Y_0\overline{\varepsilon_1} + \overline{\varepsilon_1^2} + 2Y_0\overline{\varepsilon_2^2}$$

mais $2Y_0\overline{\varepsilon_1}$ est certainement nul puisque l'on a $\overline{\varepsilon_1} = 0$ et l'on voit que le terme $\overline{\varepsilon_2^2}$, négligeable dans le premier problème, est ici en concurrence avec $\overline{\varepsilon_1^2}$.

Cet exemple, quoique un peu éloigné de notre problème, montre cependant les précautions qu'il faut nécessairement prendre dans l'évaluation des moyennes quadratiques : les calculs doivent toujours être poussés jusqu'au second ordre.

Nous serons donc amenés à distinguer de façon irréductible les problèmes du premier ordre où nous déterminerons les fluctuations d'amplitude et de phase pour une expérience de durée t^*, et les problèmes du second ordre touchant les propriétés du carré moyen du bruit, ou du carré moyen « signal + bruit ».

A. — CAS D'UN OSCILLATEUR IDÉAL A FRÉQUENCE INDÉPENDANTE DE L'AMPLITUDE (FRÉQUENCE f_0).

1. Composants de Rice de l'oscillogramme de bruit et approximations pour un bruit faible.

L'oscillateur que nous prendrons d'abord pour type sera un oscillateur idéal à fréquence indépendante de l'amplitude. Nous le supposerons, par

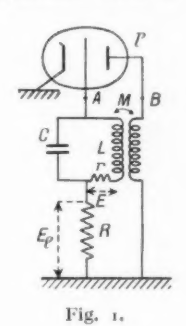


Fig. 1.

exemple, régi par une loi de van der Pol de la forme classique :

$$(5) \qquad \frac{d^2V}{dt^2} - 2\varepsilon\omega_0(1 - \beta V^2)\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0,$$

ε et β, coefficients caractéristiques du système;
ω_0, pulsation;
V, variable choisie;

qui conduit à un isochronisme approché au voisinage de la stabilisation, comme il a été dit plus haut.

Pour fixer les idées, il s'agira de l'oscillateur entretenu par mutuelle grille-plaque de la figure 1 : on se rend compte aisément que le potentiel de grille V vérifie bien l'équation (5). On a alors

$$\varepsilon\omega_0 = -\frac{MS_0 + rC}{2LC};$$

$$\beta = -\frac{3Mb}{MS_0 + rC}; \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

(la caractéristique « courant plaque-tension grille » de la lampe d'entretien étant mise sous la forme du développement limité usuel, $i_p = S_0 V + bV^3$).

Suivant une méthode précédemment dévelopée [2], dont nous ne rappellerons que les principaux résultats afin d'alléger l'exposé, les modifications apportées par le bruit au régime théorique seront traduites par l'adjonction à l'équation (5) d'un second membre aléatoire que nous écrirons, pour raison d'homogénéité, $\omega_0^2\, E(t)$. Elle devient donc

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}t^2} - 2\varepsilon\omega_0(1 - \beta V^2)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 V = \omega_0^2\, E(t).$$

Il est commode d'employer la méthode de Rice pour caractériser l'effet du bruit; on représentera la perturbation qui se superpose au signal par la somme de deux oscillations de pulsation ω_0 (celle du régime idéal non perturbé) en quadrature, modulées par des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ lentement variables. Cette dernière hypothèse est permise si l'on suppose *a priori* que le spectre cherché est de faible largeur ($\varepsilon\omega_0$ petit).

Nous poserons donc

$$V = V_0 + V_1 + V_2 = A_0 \sin \omega_0 t + X(t) \sin \omega_0 t + Y(t) \cos \omega_0 t,$$

$A_0 \sin \omega_0 t$ représentant le signal théorique.

Dans ces conditions, l'équation précédente est équivalente à l'ensemble des deux équations

$$(7) \qquad \omega_0^2 V_0 - 2\varepsilon\omega_0(1 - \beta V_0^2)\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 V_0}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 V_1}{\mathrm{d}t^2} + 4\varepsilon\omega_0\left[1 + \beta V_0(V_1 + V_2) + \frac{\beta}{2}(V_1 + V_2)^2\right]\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} + \left[\omega_0^2 + 2\omega_0\beta(V_1 + V_2)\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}\right]V_1 + \frac{\mathrm{d}^2 V_2}{\mathrm{d}t^2} + 4\varepsilon\omega_0\left[\beta V_0(V_1 + V_2) + \frac{\beta}{2}(V_1 + V_2)^2\right]\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} + \left[\omega_0^2 + 2\omega_0\beta(V_1 + V_2)\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t}\right]V_2 = \omega_0^2\, E(t).$$

a. APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE. FLUCTUATIONS DE PHASE ET D'AMPLITUDE. — Le bruit $E(t)$ peut lui-même être décomposé en une partie impaire et une partie paire, $E_1(t)$ et $E_2(t)$, suivant la même méthode. Si l'on tient compte de plus de ce qu'il est très faible par rapport au signal, on peut considérer son effet, c'est-à-dire $V_1 + V_2$, comme infiniment petit du premier ordre par rapport au signal V_0.

Négligeant dans le système précédent, les termes du second ordre et au delà, la deuxième équation se sépare en deux équations distinctes

$$(9) \qquad V_1'' + 4\varepsilon\omega_0 V_1' + \omega_0^2 V_1 = \omega_0^2\, E_2(t),$$

$$(10) \qquad V_2'' + \omega_0^2 V_2 = \omega_0^2\, E_1(t).$$

On remarque alors que l'oscillateur se comporte comme un pendule non amorti vis-à-vis de la partie $E_1(t)$ du bruit, et comme un pendule amorti, de constante de temps $\tau = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0}$, vis-à-vis de $E_2(t)$.

La décomposition précédente est rendue plus intuitive si l'on considère le bruit $E(t)$ comme formé d'un grand nombre de chocs naturels. Elle se ramène, en effet, à la décomposition en deux parties des chocs naturels élémentaires, décomposition qui s'introduit d'elle-même, comme nous allons le voir, si l'on examine l'effet d'un choc isolé. Le résultat global est retrouvé en sommant sur l'ensemble des chocs.

Résumons, là encore, les principaux résultats :

Si l'on assimile le signal théorique exempt de bruit à une sinusoïde pure d'équation $V_0 = A_0 \sin \omega_0 t$, un choc naturel d'échelon q, infligé au système à l'instant t_j, perturbe à la fois la phase et l'amplitude du signal. Il peut donc être remplacé par deux chocs composants, l'un produisant la même perturbation de phase sans modification d'amplitude, l'autre la même perturbation d'amplitude sans modification de phase.

On vérifie facilement [2] que le premier doit avoir pour un échelon $q \sin \omega_0 t_j$ et doit être appliqué à l'instant $t_{j1} = kT_0 + \frac{T_0}{4}$ le plus voisin de t_j (k entier; T_0, période du signal théorique). Le deuxième doit avoir pour échelon $q \cos \omega_0 t_j$ et doit être appliqué à l'instant $t_{j2} = kT_0$ le plus voisin de t_j.

Comme le montre l'équation (10), l'effet du composant déphaseur ne s'atténue pas avec le temps : il décale simplement le signal théorique parallèlement à l'axe des temps. Sous une autre forme, celà revient à ajouter à la sinusoïde théorique $A_0 \sin \omega_0 t$ une petite sinusoïde en quadrature (avance ou retard) d'amplitude $q\omega_0 \sin \omega_0 t_j$ (*fig.* 5).

L'effet de l'autre composant (perturbation d'amplitude) s'amortit au contraire avec la constante de temps de retour au régime du système $\left(\tau = \frac{1}{2\varepsilon\omega_0}\right)$. Cela revient à ajouter au signal $A_0 \sin \omega_0 t$ une petite sinusoïde amortie, en phase ou en opposition de phase, d'amplitude au départ $q\omega_0 \cos \omega_0 t_j$ et de même constante de temps (*fig.* 5).

La signification des équations (9) et (10) apparaît donc clairement, la première traduit les fluctuations d'amplitude du signal et la seconde ses fluctuations de phase.

Insistons enfin sur le fait que le résultat ci-dessus est une approximation du premier ordre, valable

parce que l'on suppose le bruit faible à côté de l'amplitude du signal :

La variation d'amplitude produite par le terme de perturbation pair est du premier ordre, de même la variation de phase produite par le terme de perturbation impair.

b. Approximation du second ordre. Puissance de bruit ([3]). — Il faut reconsidérer la question lorsqu'on veut calculer la puissance totale de bruit et déterminer son spectre. Un exemple grossièrement simple fera comprendre la nécessité de pousser alors les calculs jusqu'au second ordre :

A une sinusoïde d'amplitude notable $A_0(y = A_0 \sin\omega_0 t)$,

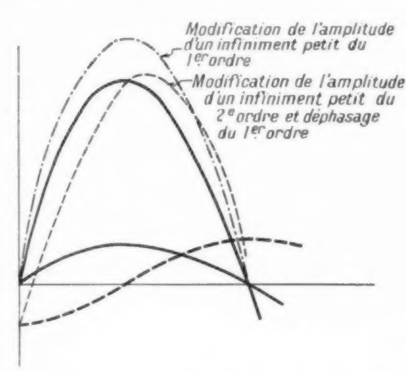


Fig. 2.

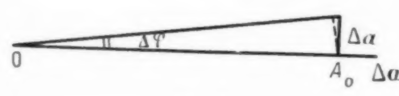


Fig. 3.

ajoutons deux petites sinusoïdes, l'une en phase, l'autre en quadrature, toutes deux d'amplitude Δa.

La petite sinusoïde en phase ajoute à A_0 la valeur Δa, infiniment petit du premier ordre (*fig.* 2, 3 et 4).

La petite sinusoïde en quadrature modifie aussi A_0, mais lui apporte seulement le terme du second ordre $\frac{(\Delta a)^2}{2A_0}$.

Elle produit évidemment aussi le déphasage du premier ordre :

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta a}{A_0} \qquad (\textit{fig. } 2, 3 \text{ et } 4).$$

La sinusoïde initiale ainsi altérée a pour nouvelle amplitude :

$$A_0 + \Delta a + \frac{(\Delta a)^2}{2A_0} \quad \text{ou} \quad A_0 + \Delta a \quad \text{au premier ordre.}$$

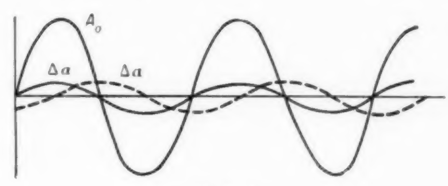


Fig. 4.

Sa nouvelle phase est

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta a}{A_0} \qquad \text{(infiniment petit du premier ordre).}$$

Supposons que nous recommencions le dessin de la figure 4 de façon aléatoire un grand nombre de fois, Δa pouvant être tantôt positif, tantôt négatif, nul en moyenne ($\overline{\Delta a} = 0$).

La puissance moyenne de la sinusoïde altérée aura pour valeur

$$\frac{1}{2}\overline{\left[A_0 + \Delta a + \frac{(\Delta a)^2}{2A_0}\right]^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[A_0^2 + \overline{(\Delta a)^2} + 2A_0\frac{\overline{(\Delta a)^2}}{2A_0}\right] = \frac{1}{2}\left[A_0^2 + 2\overline{(\Delta a)^2}\right]$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près.

Nous voyons que les contributions apportées à la puissance moyenne par les termes Δa *et* $\frac{(\Delta a)^2}{2A_0}$ *sont les mêmes, et se réduisent à* $\overline{(\Delta a)^2}$.

Il en résulte d'ailleurs la propriété bien connue : la puissance moyenne s'obtient en ajoutant séparément la puissance de la sinusoïde initiale et les

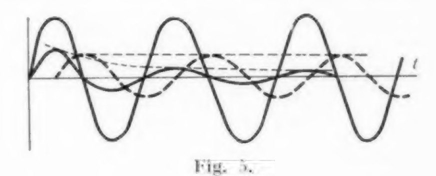


Fig. 5.

puissances moyennes des deux sinusoïdes perturbatrices.

Le problème que nous avons à traiter est identique, à cela près que les deux petites sinusoïdes précédentes doivent être remplacées par les deux termes sinusoïdaux, modulés en amplitude, de Rice.

Reportons-nous plus simplement à la constitu-

([3]) Nous appellerons « puissance de bruit » la puissance réduite qui serait dépensée si la tension de bruit était appliquée entre les extrémités d'une résistance de 1 Ω.

tion ultime de ces deux termes, c'est-à-dire aux effets d'un choc naturel isolé : la petite sinusoïde vraie en quadrature et la petite sinusoïde amortie de la figure 5. Il faut maintenant tenir compte, pour déterminer la puissance de bruit qui s'ajoute à celle du signal, de la perturbation d'amplitude du second ordre apportée par la sinusoïde en quadrature. Cependant, la représentation adoptée, correcte au premier ordre d'approximation, est, de toute évidence, incorrecte au second puisqu'elle ne traduit pas l'amortissement exponentiel de cette perturbation d'amplitude du second ordre.

Fonction de corrélation du signal entaché de bruit. — Un calcul un peu long (annexe I *b*), tenant compte de cette décroissance, et faisant intervenir aussi tous les infiniment petits du second ordre qui apportent leur contribution à la puissance de bruit, conduit à remplacer les équations

$$(11) \qquad V_1'' + 4\varepsilon\omega_0 V_1' + \omega_0^2 V_1 = \omega_0^2\, G_2(t - t_j),$$

$$(12) \qquad V_2'' + \omega_0^2 V_2 = \omega_0^2\, G_1(t - t_j),$$

déduites de (9) et (10) dans le cas où $E(t)$ est remplacé par une impulsion isolée, $G(t - t_j)$, au temps t_j [$G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$ désignent alors les composantes impaire et paire de $G(t - t_j)$] par

$$(13) \qquad V_1'' + 4\varepsilon\omega_0 V_1' + \omega_0^2 V_1 = \omega_0^2\, G_2(t - t_j) - \left[\varepsilon\omega_0^4 \sqrt{\beta}\, q_1^2 + 3\varepsilon\omega_0^4 \sqrt{\beta}\, q_2^2\, e^{-2\lambda(t-t_j)}\right] \cos\omega_0 t,$$

$$(14) \qquad V_2'' + \omega_0^2 V_2 = \omega_0^2\, G_1(t - t_j) + 2\varepsilon\omega_0^4 \sqrt{\beta}\, q_1 q_2\, e^{-\lambda(t-t_j)} \sin\omega_0 t,$$

avec

$$q_1 = \int_0^{\infty} G_1(t - t_j)\,\mathrm{d}t, \qquad q_2 = \int_0^{\infty} G_2(t - t_j)\,\mathrm{d}t;$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \qquad \lambda = \frac{1}{\tau}.$$

Nous poserons par la suite pour simplifier l'écriture :

$$\alpha_1 = q_2\,\omega_0\, e^{-\lambda(t-t_j)}, \qquad \alpha_2 = q_1\,\omega_0.$$

Les intégrales peuvent encore s'exprimer en termes sinusoïdaux modulés par des fonctions exponentielles du temps et l'on peut parvenir à calculer la fonction de corrélation du signal entaché de bruit

$$V(t) = V_0(t) + V_1(t) + V_2(t),$$

qui prend la forme

$$(15) \qquad \overline{\psi(t^*)} = \overline{V(t)V(t + t^*)} = \frac{1}{2} A_0^2 \cos\omega_0 t^* + \frac{1}{2}\sum_j \overline{\alpha_1(t)\,\alpha_1(t + t^*)} \cos\omega_0 t^* - \frac{3}{2}\sum_j \overline{\alpha_1^2(t_j)\, e^{2\lambda t_j}} \cos\omega_0 t^* + \frac{1}{2}\sum_j \overline{\alpha_2^2(t_j)\, e^{\lambda t_j}} \cos\omega_0 t^*.$$

Le premier terme correspond à la raie monochromatique du signal théorique, le deuxième à un spectre continu aisément déterminé, qui caractérise les réponses exponentiellement amorties aux impulsions composantes élémentaires paires $G_2(t - t_j)$, les deux derniers à un composant périodique de bruit, *en phase* avec le signal, de puissance

$$P\,(\text{composant périodique}) = \left| \frac{1}{2}\sum_j \overline{\alpha_2^2(t_j)\, e^{\lambda t_j}} - \frac{3}{2}\sum_j \overline{\alpha_1^2(t_j)\, e^{2\lambda t_j}} \right|.$$

La présence de ce composant périodique, en phase avec le signal, est clairement expliquée sur l'exemple simple des figures 2 et 4. On voit en effet que, tandis que les perturbations du premier ordre (Δa) peuvent être soit positives soit négatives, et par suite s'ajouter ou se retrancher de l'amplitude A_0, les perturbations du second ordre $\left[\frac{(\Delta a)^2}{2A_0}\right]$ sont toujours positives et correspondent toujours à un accroissement de l'amplitude A_0.

Autrement dit, les perturbations du second ordre sont représentées par l'addition au signal d'une oscillation de faible amplitude (infiniment petit du second ordre), de même fréquence, *en phase* avec ce dernier.

Bien entendu l'amplitude de cette oscillation en phase n'est pas constante, mais elle est toujours positive et admet pour moyenne l'amplitude du composant périodique en question.

Cette explication simplifiée ne fait cependant pas intervenir les déphasages qui accompagnent toujours, comme nous l'avons vu, les fluctuations d'amplitude et il sera indispensable de rendre le raisonnement complet et rigoureux, aussi examinerons-nous cette question de façon plus détaillée dans l'annexe I*a*.

On vérifie facilement que la puissance de bruit répartie sur le spectre continu vaut

$$P\,(\text{spectre}) = \frac{1}{2}\sum_j \overline{\alpha_1^2(t_j)\, e^{2\lambda t_j}}$$

et que, contrairement au composant périodique, ce spectre continu correspond à une composante de bruit incohérente avec le signal.

Dans le cas d'un circuit amorti passif, la même méthode conduit à une décomposition du bruit en deux spectres continus qui se superposent à la raie du signal; l'un est dû au terme que nous avons appelé V_1 en phase avec le signal, l'autre au terme V_2 en quadrature. La non-linéarité conduit donc à l'écrasement de l'un de ces deux spectres qui est remplacé par la raie du composant périodique.

Équipartition de la puissance de bruit entre le terme incohérent et le composant périodique cohérent. — En sommant sur les t_i, on vérifie qu'il y a équipartition de la puissance de bruit entre le composant périodique et le spectre continu. Cette équipartition permet de ramener l'étude à celle de l'équation du premier ordre (9) qui donne le spectre continu.

Un point de comparaison intéressant est le circuit passif linéaire qui reste si l'on supprime la lampe d'entretien.

Attaqué par le bruit $E_1 + E_2$, le spectre qu'il produit est obtenu, en vertu du principe de superposition des régimes, en superposant le spectre dû à E_1 et celui dû à E_2 (spectres entre lesquels la puissance de bruit est également répartie).

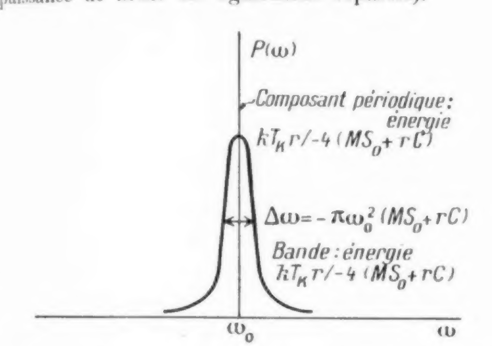


Fig. 6. — Puissance dépensée dans la bande $d\omega$: $P(\omega)\,d\omega$.

Pour comparer les puissances de bruit de l'oscillateur entretenu et du circuit passif, il suffit donc de comparer les surfaces des spectres obtenus à partir de l'équation (9) et de

(16) $$LCV_1'' + rCV_1' + V_1 = E_2(t).$$

On trouve rapidement les expressions suivantes [4] :

Puissance réduite du spectre (16) :

$$\frac{kT_k r}{2rC} = \frac{kT_k}{2C};$$

Puissance réduite du spectre (9) (spectre de perturbation d'amplitude continu) :

$$\frac{kT_k r}{-4(MS_0 + rC)};$$

Carré de l'amplitude stabilisée théorique :

$$A_0^2 = -\frac{4(MS_0 + rC)}{3Mb};$$

Ordonnée maximum du spectre du circuit entretenu :

$$\frac{kT_k r}{4\pi\omega_0^4(MS_0 + rC)^2};$$

Largeur du spectre du circuit entretenu (surface sur ordonnée maximum) :

$$-\pi\omega_0^2(MS_0 + rC).$$

Application : Oscillateur à couplage mutuel. — Prenons pour exemple l'oscillateur représenté sur le schéma (1) avec les caractéristiques suivantes :

$$L = 1\ \mu\text{H}, \quad f = 30\ \text{Mc/s}, \quad r = 1{,}25\ \Omega.$$
$$Q = 150, \quad T_k = 293°\ \text{K}.$$

La lampe d'entretien est une 6 AK 5, avec

$$S_0 = 2.10^{-3}\ \text{A/V}, \quad b = -0{,}8.10^{-3}.$$

La puissance répartie sur le spectre de bruit incohérent avec le signal [spectre (9)], pour une amplitude stabilisée théorique de ce signal égale à 1 V, vaut alors

$$\frac{kT_k r}{-4(MS_0 + rC)} = 8{,}3.10^{-11}\ \text{W}$$

(M, inductance mutuelle du couplage d'entretien).

L'ordonnée maximum de ce spectre de bruit incohérent vaut

$$\frac{kT_k r}{4\pi\omega_0^2(MS_0 + rC)^2} = 0{,}49.10^{-16}\ \text{W}/2\pi\text{c/s}.$$

La bande de bruit sur laquelle se détache la raie fine du signal a pour largeur, dans l'exemple choisi (surface sur ordonnée maximum)

$$\Delta\omega = 1{,}69.10^6 \quad (2\pi\text{c/s})$$
$$\left(\text{ce qui donne } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sim \frac{1}{100}\right).$$

On déduit rapidement de ces valeurs le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ tel qu'il a été défini plus haut [5]

$$\frac{S}{B} = \frac{\text{Puissance du signal}}{\text{Puissance du bruit incohérent}} = 6.10^9 \quad \text{ou} \quad 97{,}8\ \text{db}.$$

Point de comparaison : Le circuit oscillant non entretenu. — La puissance du bruit incohérent

(4) $\overline{E^2(t)}$ est calculé à partir de la formule de Nyquist

$$\overline{E^2(t)} = 4kT_k r\,\Delta f.$$

On a de plus

$$\overline{E_1^2(t)} = \overline{E_2^2(t)} = \frac{\overline{E^2(t)}}{2}.$$

(5) La puissance réduite d'un signal de 1 V est 0,5 W.

émise par le même circuit oscillant L, r, C, lorsqu'il est déconnecté de la lampe d'entretien, et se comporte alors comme un circuit linéaire amorti, a pour valeur

$$B = 7.10^{-11}\ \text{W}.$$

Le rapport $\frac{S}{B}$, lorsqu'on induit dans ce circuit amorti un signal de 1 V (tension mesurée entre les mêmes bornes que plus haut), est

$$\frac{S}{B} = 7.10^{9} \quad \text{ou} \quad 98,4\ \text{db},$$

ce bruit est réparti sur une bande de largeur

$$\Delta\omega = 1,98.10^{6} \quad (2\pi c/s).$$

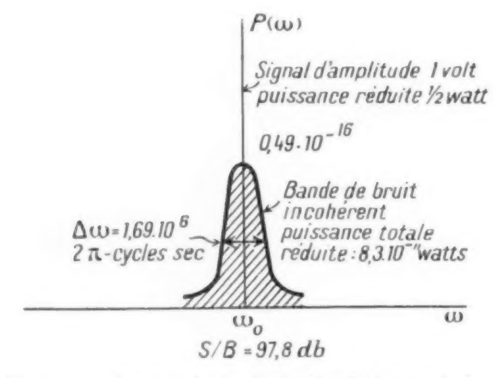


Fig. 7. — Spectre de bruit de l'oscillateur entretenu.

Ces résultats nous montrent que le spectre du bruit incohérent obtenu lorsque le circuit oscillant est déconnecté ne diffère pas très sensiblement de celui que l'on observe avec entretien.

2. Largeur de raie du signal.

Jusqu'à présent, nous avons représenté le signal lui-même et son composant périodique de bruit (composante du bruit cohérente avec le signal) comme une raie infiniment fine. On sait bien que toute raie possède physiquement une largeur finie : ici il en est de même, mais cette largeur que nous allons maintenant évaluer est extrêmement faible devant la largeur du spectre de bruit incohérent, c'est pourquoi notre méthode de calcul la fournit en première approximation comme nulle.

Il est bien simple de remédier à cette schématisation excessive ; il nous suffira pour cela de mettre en lumière le point où le calcul cesse de se rapprocher de la réalité.

Nous avons traduit jusque-là les déphasages par addition au signal théorique d'une petite sinusoïde en quadrature, modulée en amplitude. Cette méthode a été utilisée en supposant très faible l'amplitude de la sinusoïde perturbatrice, elle cesse d'être valable quand la sinusoïde perturbatrice devient notable à côté du signal et elle impose, par suite, aux déphasages ainsi créés de rester beaucoup plus petits que π.

Ces déphasages ne sont, cependant, nullement limités et il suffit, pour observer un grand déphasage, de suivre assez longtemps l'évolution du signal. En effet, nous avons vu que la mémoire de phase du système est infinie ; les déphasages successifs non corrélés, tantôt positifs, tantôt négatifs, s'ajoutent intégralement et le carré moyen du déphasage résultant croît donc, par suite, proportionnellement au temps.

La méthode employée ne permet donc de suivre l'évolution du signal que sur une durée limitée, et c'est pourquoi elle fournit une raie de largeur nulle lorsqu'on extrapole son champ d'application à une durée infinie.

S'il n'en résulte pas d'erreurs dans le calcul du bruit incohérent c'est parce que la durée de validité de la méthode est très supérieure à la constante de temps de retour au régime de l'oscillateur.

Évaluons maintenant la largeur ultime de la raie (signal et composant périodique) en tenant compte de ce que la durée de validité de la théorie n'est pas infinie :

Suivant un procédé classique, on supposera le signal dépouillé de ses irrégularités d'amplitude, dont l'étude a été menée indépendamment, et on le considérera comme formé de tronçons de sinusoïdes, de même amplitude (l'amplitude du signal stabilisé théorique) et de même pas, légèrement déphasés de façon aléatoire les uns par rapport aux autres. Il ne restera plus, pour obtenir le spectre complet, qu'à superposer le spectre de perturbation d'amplitude à ce signal élargi.

On trouve ainsi pour fonction de corrélation moyenne (annexe II) :

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2} A_0^2 \, e^{-\frac{1}{2}\overline{\Delta\Phi^2}\, t^*} \cos\omega_0 t^*,$$

$\overline{\Delta\Phi^2}$ étant le carré moyen de la fluctuation de phase au bout du temps t^*, dont la valeur calculée à partir de la résistance génératrice de bruit r et de sa température absolue T_k, de l'amplitude stabilisée A_0, et de la constante de Boltzmann k, est [2]

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \frac{k T_k r \omega_0^2 t^*}{A_0^2}.$$

On a donc, en définitive

$$(17) \qquad \overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2} A_0^2 \, e^{-\frac{1}{2A_0^2} k T_k r \omega_0^2 t^*} \cos\omega_0 t^*.$$

La largeur du signal s'en déduit immédiatement, on trouve

$$\Delta\omega = \frac{1}{2A_0^2} k T_k r \omega_0^2 \pi. \quad (18)$$

C'est aussi la largeur du composant périodique.

On obtient alors la figure 8 à partir de la correction de la figure 6.

Dans l'exemple numérique précédent, nous trouvons pour élargissement des raies (signal et composant périodique)

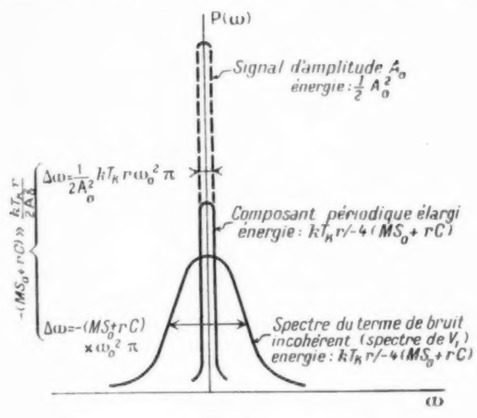


Fig. 8.

$$\Delta\omega = \frac{1}{2A_0^2} k T_k r \omega_0^2 \pi = 2{,}8 . 10^{-4} \quad (2\pi \, c/s),$$

alors que la largeur du spectre continu initial avait pour valeur

$$\Delta\omega = -(MS_0 + rC)\omega_0^2 \pi = 1{,}69 . 10^6 \quad (2\pi \, c/s).$$

Nous voyons donc que l'assimilation du signal à une raie parfaitement fine est entièrement justifiée.

B. — CAS D'UN OSCILLATEUR RÉEL A FRÉQUENCE VARIABLE AVEC L'AMPLITUDE (FRÉQUENCE D'AMORÇAGE f_0, FRÉQUENCE STABILISÉE f_s).

Les oscillateurs réels sont généralement plus compliqués que celui que nous venons de prendre pour type. Comme nous l'avons indiqué au début, leur fréquence dépend plus ou moins de l'amplitude d'oscillation, ce qui conduit à introduire dans leur description un nouveau paramètre μ caractéristique de leur loi fréquence-amplitude. Nous supposerons donc maintenant que la fréquence de l'oscillateur est reliée aux variations de son amplitude a par une loi de la forme indiquée plus haut :

$$f = f_0\left[1 + \frac{3\mu}{8} a^2\right], \quad (19)$$

f, fréquence correspondant à l'amplitude a;
f_0, fréquence à l'amorçage $a = 0$;
μ, coefficient de dépendance fréquence-amplitude.

et nous déterminerons le spectre du signal entaché de bruit qu'il émet. Nous admettrons que le système garde assez longtemps la mémoire des chocs électroniques individuels pour que l'état d'oscillation dépende à chaque instant d'un très grand nombre de chocs antérieurs. L'écart δa à l'amplitude stabilisée A_0 varie donc lentement, à de petites fluctuations locales près dont la cadence est celle des chocs.

Un état défini par l'amplitude $A_0 + \delta a$ (en négligeant les petites irrégularités locales) sera appelé « niveau d'oscillation », et nous voyons qu'à chaque niveau d'oscillation $A_0 + \delta a$ correspondra une fréquence $f_s + \delta f$ différente de la fréquence de régime.

L'effet d'une impulsion élémentaire, considéré isolément, se réduira à une *perturbation d'amplitude* très petite à côté de δa, et à un petit *déphasage*. L'amplitude tendra, après le choc, à reprendre la valeur stabilisée théorique suivant une loi exponentielle représentée par la courbe en pointillé de la figure 9.

Cependant, un autre choc sera infligé au système bien avant que l'amplitude n'ait eu le temps de s'écarter notablement de la valeur $A_0 + \delta a$. De cette façon, la suite des chocs naturels maintient

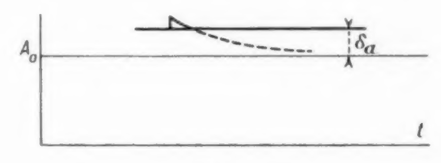


Fig. 9.

l'amplitude au voisinage de la valeur $A_0 + \delta a$ pendant un laps de temps relativement long à côté de l'intervalle moyen qui sépare les impulsions successives.

Un examen détaillé du niveau d'oscillation $A_0 + \delta a$ permet donc l'analyse des petites fluctuations locales d'amplitude et de phase, tandis qu'une observation plus grossière conduirait à confondre ce niveau avec une portion de sinusoïde d'amplitude $A_0 + \delta a$ et de fréquence $f_s + \delta f$ (*fig.* 10).

Les raisonnements du paragraphe précédent sont

valables ici tant que l'oscillateur se maintient sur un niveau donné. En effet, les fluctuations de fréquence restent négligeables au voisinage de ce

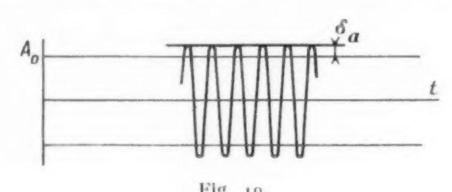


Fig. 10.

niveau, et tout se passe comme si au signal d'amplitude A_0, de fréquence $f_x + \delta f$, se superposait un spectre de bruit du type précédent.

Il semble donc, au premier abord, que ce spectre de bruit comporte :

a. une bande continue : spectre d'un pendule amorti, de fréquence $f_x + \delta f$ et de constante de temps τ (celle de retour au régime théorique de l'oscillateur);

b. une raie de composant périodique.

Ces deux spectres proviennent encore de la décomposition en deux parties des effets des impulsions naturelles et sont obtenus en remplaçant ces dernières par deux suites distinctes. Les impulsions de la première suite sont appliquées au début de chaque cycle du signal (points d'élongation nulle) et ont pour conséquence la bande continue. Les autres sont appliquées aux points d'élongation maximum, elles produisent un déphasage infiniment petit du premier ordre, et une modification d'amplitude du second ordre d'où résulte le composant périodique *en phase* avec le signal.

Cependant la remarque faite à la fin du paragraphe précédent est encore valable, car une limitation dans le temps est à nouveau imposée à l'état envisagé : l'oscillateur ne reste pas indéfiniment sur le même niveau. Le composant periodique, ainsi que le signal auquel il se superpose, doivent par suite être remplacés par des tronçons de sinusoïdes ayant pour durées de vie celles des niveaux. Leurs raies ont donc une largeur finie que nous déterminerons.

La limitation dans le temps imposée par la durée de vie des niveaux est beaucoup plus étroite que celle du paragraphe précédent et l'élargissement des raies qui en résulte est donc plus important. On voit facilement, en particulier, que les deux raies ci-dessus, du signal et du composant périodique, doivent être remplacées par des spectres de même largeur que la bande continue du bruit incohérent. Cela provient de ce que la largeur des raies et de la bande sont liées à une même durée caractéristique de l'oscillateur : sa constante de temps τ de retour au régime.

1. Oscillation pseudo-sinusoïdale tangente à l'oscillation naturelle (rappel), son comportement en présence du bruit.

L'étude des oscillateurs non linéaires stabilisés en amplitude [1] nous a conduit à préciser la loi d'évolution de leur amplitude entre l'amorçage et le régime permanent. Cette loi est représentée de façon générale par le graphique de la figure 11.

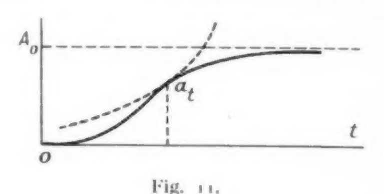


Fig. 11.

Il a été commode d'approcher cette courbe, dans un petit domaine entourant la valeur a_t de l'amplitude, par une exponentielle tangente.

Cela nous a permis en effet d'approcher, dans cette région, la loi d'oscillation non linéaire par une loi linéaire dépendant du paramètre a_t, et de lui appliquer en particulier la méthode de Nyquist. L'oscillateur non linéaire considéré se confond donc, pour chaque valeur de son amplitude, avec un oscillateur linéaire régi par une « équation linéaire tangente » dont les coefficients dépendent de a_t.

Ce point de vue admet la conséquence suivante (*fig.* 12) :

La perturbation locale apportée par le bruit à

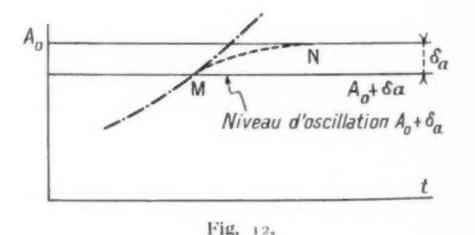


Fig. 12.

l'oscillateur réel, pour un niveau d'oscillation donné $A_0 + \delta a$ (sur la figure 12, δa est négatif) doit être la même que celle qui serait apportée à l'oscillateur linéaire tangent correspondant.

Il peut sembler surprenant de remplacer le niveau d'oscillation donné $A_0 + \delta a$ (segment en trait plein de la figure 12), où l'amplitude du signal reste constante en moyenne, par une pseudo-sinusoïde à loi d'amplitude exponentielle (portion de courbe en trait mixte).

Cette assimilation du signal à une pseudo-sinusoïde est cependant justifiée par le fait qu'un niveau d'oscillation n'est pas un état d'équilibre stable mais un état de contrainte. Si de nombreux chocs n'intervenaient pas, l'amplitude, de valeur initiale $A_0 + \delta a$ (point M de la figure 12), croîtrait suivant la courbe en pointillé MN. L'approximation linéaire tangente revient à approcher cette courbe MN, au voisinage de M, par l'exponentielle en trait mixte; les chocs successifs perturbent cette trajectoire et maintiennent *provisoirement* l'amplitude constante, à la valeur $A_0 + \delta a$.

On est en apparence ramené à l'étude de l'effet du bruit de fond sur un oscillateur linéaire. Il serait faux cependant de déterminer la largeur du spectre de puissance du niveau $A_0 + \delta a$ à partir de l'équation linéaire tangente correspondante. Cela reviendrait à calculer la largeur spectrale à partir de la constante de temps de l'exponentielle tangente au point M (courbe en trait mixte), *alors que c'est la constante de temps τ de retour au régime théorique (courbe en pointillé) qui impose cette largeur* [6].

Il est facile de se rendre compte que ce procédé serait incorrect en envisageant le cas où l'équilibre théorique est atteint aux fluctuations locales près (niveau d'oscillation A_0).

Dans ce cas, la constante de temps de l'oscillation tangente est infinie et la largeur du spectre serait par suite nulle. La nécessité de limiter l'oscillation tangente à la durée de vie du niveau (τ en moyenne) élargit considérablement le spectre. Sa largeur est alors imposée par τ et non par la constante de temps de l'oscillation tangente (ici infinie).

2. Propriétés moyennes du spectre de puissance du signal perturbé.

Pour faciliter l'exposé, nous appellerons :

Spectre (A) : la raie élargie du signal d'amplitude A_0 et de fréquence $f_0 + \delta f$, correspondant au niveau $A_0 + \delta a$;

Spectre (B) : la bande continue produite par les perturbations d'amplitude du premier ordre incohérentes avec le signal S;

Spectre (C) : la raie élargie du composant périodique produit par les perturbations d'amplitude du second ordre cohérentes avec S.

Les temps d'observation sont en pratique très longs devant les durées de vie des différents niveaux (τ en moyenne) et l'on observe toujours un spectre global résultant des trois spectres précédents.

Une difficulté se présente lorsqu'on cherche à déterminer ce spectre global : les niveaux d'oscillation ne sont pas absolument indépendants les uns des autres, ils cont *corrélés.*

Le spectre observé n'est donc pas la moyenne arithmétique des spectres des différents niveaux.

Prenons un exemple simple :

Le spectre d'un tronçon de sinusoïde d'amplitude a_0 et de fréquence f_0 est bien connu, sa largeur est d'autant plus grande que la durée du train d'onde est plus faible. Si l'on met bout à bout un grand nombre de trains d'onde identiques, de façon à former une portion de sinusoïde de plus longue durée, le spectre de l'ensemble est beaucoup plus étroit que les spectres individuels des tronçons. Il n'est pas obtenu en prenant la moyenne arithmétique des spectres composants.

Cet effet est à rapprocher de celui qui se produit lorsqu'on fait interférer sur un même écran des lumières cohérentes. L'intensité lumineuse en chaque point de l'écran n'est pas la moyenne arithmétique des intensités composantes.

Seul un examen attentif de la corrélation existant entre les niveaux permet d'obtenir l'effet statistique observable sur une longue durée. Le problème sera d'ailleurs simplifié par le fait qu'on peut isoler les oscillations A, B, C, correspondant aux spectres (A), (B), (C), et l'on déterminera séparément l'effet global (A_m) des spectres (A), (B_m) des spectres (B), et (C_m) des spectres (C).

Résultante statistique (A_m) des spectres (A) : Signal résultant. — Le signal, dépouillé des perturbations d'amplitude du premier et du second ordre dont l'effet est étudié par ailleurs, est formé de tronçons de sinusoïdes, de même amplitude A_0, de durée moyenne τ, et *de pas aléatoire.*

---

[6] Ce développement un peu long nous a semblé nécessaire, car il introduit une différence fondamentale entre l'oscillateur de R. M. Lerner, où le caractère linéaire est conservé quelle que soit la durée d'observation, et le nôtre. La largeur spectrale est déterminée par cet auteur à partir de la constante de temps de l'exponentielle tangente (ou, ce qui revient au même, du diagramme de Nyquist qui lui correspond) et non à partir de τ.

Un tronçon de sinusoïde donné, débutant à l'instant t^*, diffère du tronçon commençant à l'instant zéro à la fois par son pas et par sa phase. Sa phase dépend de tous les tronçons qui le précèdent, au contraire son pas, de valeur relativement arbitraire pour chaque niveau, est indépendant des tronçons antérieurs.

Un calcul un peu long (annexe III) donne le carré moyen $\overline{\Delta\Phi^2}$ de la phase de ce tronçon, en prenant pour phase zéro celle du tronçon origine; on trouve

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \omega_s^2 t^* \tau \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 A_0^2 \overline{(a - A_0)^2}. \tag{20}$$

(Il est évidemment indirectement lié aux fluctuations d'amplitude puisque ce sont elles qui réagissent sur la fréquence instantanée des différents tronçons par l'intermédiaire du coefficient de couplage fréquence-amplitude μ.)

Tenant compte aussi de la fluctuation de son pas, on trouve pour fonction de corrélation moyenne (annexe III) :

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2} A_0^2 e^{-4\pi^2 \overline{(f-f_s)^2} \frac{\tau^2}{3}} e^{-\frac{1}{2}\overline{\Delta\Phi^2}} \cos\omega_s t^*,$$

$\overline{(f-f_s)^2}$ est le carré moyen de la fluctuation de fréquence instantanée qui vaut, compte tenu de la formule (19) :

$$\overline{(f-f_s)^2} = f_s^2 \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 A_0^2 \overline{(a - A_0)^2}.$$

Portant cette valeur, ainsi que celle de $\overline{\Delta\Phi^2}$, dans l'expression de $\overline{\psi(t^*)}$, on trouve

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2} A_0^2 e^{-4\pi^2 f_s^2 A_0^2 \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 \overline{(a-A_0)^2} \frac{\tau^2}{3}} \times e^{-2\pi^2 f_s^2 A_0^2 \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 \overline{(a-A_0)^2} \tau t^*} \cos\omega_s t^*. \tag{21}$$

La largeur de raie du signal (surface du spectre sur hauteur maximum) s'en déduit immédiatement en appliquant une règle bien connue, qui revient ici à multiplier par $-\pi$ le coefficient de t^* qui figure dans le deuxième facteur exponentiel

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{2} \omega_s^2 A_0^2 \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 \tau \overline{(a - A_0)^2}. \tag{22}$$

Résultante statistique (B_m) des spectres (B) : bruit incohérent avec le signal. — Contrairement aux spectres (A) (raie du signal variable avec le niveau envisagé), les spectres (B) pour différents niveaux correspondent à des oscillations non corrélées entre elles. Il sera donc beaucoup plus facile de déterminer le spectre global observé sur une longue durée. Envisageant tous les niveaux d'oscillation possibles au cours d'un long intervalle de temps, on représentera l'ensemble des spectres (B) correspondants (*fig.* 13) en tenant compte des remarques suivantes :

1° Plus l'amplitude du niveau d'oscillation considéré s'écarte de la valeur stabilisée théorique A_0, plus sa fréquence instantanée s'écarte aussi de la valeur f_s correspondant au régime.

L'écart de fréquence δf est, en effet, lié à l'écart d'amplitude par la relation

$$\delta f \simeq \frac{3\mu}{4} f_s A_0 \delta a \tag{23}$$

déduite de la formule (19).

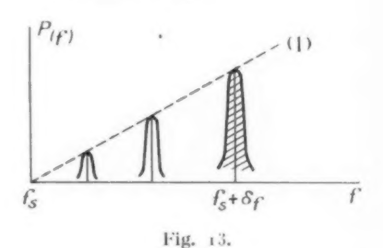


Fig. 13.

2° Si l'on admet que la constante de temps τ de retour au régime théorique est indépendante de l'écart d'amplitude δa, ce qui est vrai en pratique, tous les spectres ont même largeur. Leurs surfaces, mesurées par $\frac{1}{2}(\delta a)^2$, sont liées à δf comme le montre la formule (23). On a, en effet

$$S = \frac{1}{2}(\delta a)^2 = \frac{8}{9} \frac{(\delta f)^2}{\mu^2 f_s^2 A_0^2}.$$

On voit que la surface S est d'autant plus grande que l'écart δf est plus important. L'enveloppe de ces spectres quand δf varie est représentée grossièrement sur la figure 13.

3° Tous les niveaux d'oscillation ne sont pas également probables. La contribution qu'apporte un niveau d'oscillation donné à la puissance moyenne de bruit ne dépend donc pas uniquement de la surface du spectre correspondant; elle dépend aussi de la probabilité d'utilisation de ce niveau.

Pour chaque niveau, le spectre moyen (moyenne prise sur tous les niveaux possibles) ne peut donc être obtenu qu'en adjoignant à la figure 13 la courbe indiquant la loi de répartition des niveaux.

Cette loi de distribution est donnée par le « théo-

rème de la limite centrale », d'où l'on déduit la densité de probabilité d'un écart δa :

$$\Pi(\delta a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{(\delta a)^2}}}\, e^{-\frac{(\delta a)^2}{2\overline{(\delta a^2)}}}.$$

L'enveloppe du spectre moyen, lorsque δf varie, s'obtient donc en multipliant les ordonnées de la courbe (I) de la figure 13 par la densité de probabilité correspondante Π (δa).

Son aspect est représenté sur la figure 14.

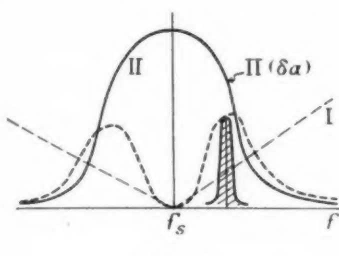


Fig. 14.

4° La courbe-enveloppe, obtenue en définitive, présente deux maxima symétriques par rapport à la raie de fréquence f_s. Il serait facile d'en préciser la forme. $\Delta\omega$ désignant la largeur de raie du signal, on trouve pour écart de chaque maximum à la raie moyenne de pulsation ω_s (*fig.* 16) :

$$\delta\omega = \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\pi\tau}}.$$

Largeur de raie du composant périodique. — Le composant périodique, comme le signal A, n'est pas en toute rigueur une sinusoïde de durée indéfinie. Il est formé aussi de tronçons de sinusoïdes mis bout à bout. On doit donc introduire encore un intervalle de corrélation qui est le même que celui du signal A, comme il est facile de le vérifier.

La raie théorique de ce « composant à peu près périodique » doit donc être remplacée par une bande étroite de même largeur que celle du signal A. Son spectre (C_m) diffère néanmoins de celui de ce signal car l'on doit faire intervenir, comme dans l'étude du spectre (B_m), la probabilité de distribution des divers niveaux. On voit alors que ce spectre admet une dépression centrale, et que son aspect est analogue à celui du spectre (B_m), à la largeur près (*fig.* 16).

Spectre résultant de (A_m), (B_m) et (C_m) : Signal + bruit. — Il nous reste à regrouper les spectres (A_m) (signal), (B_m) (spectre du bruit incohérent avec le signal), (C_m) (composant à peu près périodique) pour obtenir le spectre de puissance du signal entaché de bruit. Cette dernière opération ne doit pas être faite sans précautions.

Comme nous l'avons vu, les oscillations A et C (signal et composant périodique) sont corrélées et l'oscillation qui en résulte est obtenue en ajoutant, à chaque instant, leurs amplitudes.

De façon plus précise, si $a_2(t)$ est l'amplitude à l'instant t du terme de Rice en quadrature, la perturbation d'amplitude du second ordre que subit le signal est $\frac{a_2^2(t)}{2A_0}$ $\left(\text{l'amplitude du composant périodique, pris isolément, est par suite } \overline{\frac{a_2^2(t)}{2A_0}}\right)$.

L'amplitude résultante, à l'instant t, est

$$A_0 + \frac{a_2^2(t)}{2A_0}.$$

La puissance moyenne est

$$\frac{1}{2}\overline{\left[A_0 + \frac{a_2^2(t)}{2A_0}\right]^2} = \frac{1}{2}A_0^2 + \frac{1}{2}\overline{a_2^2(t)},$$

en négligeant $\overline{\left[\frac{a_2^2(t)}{2A_0}\right]^2}$.

La puissance du composant périodique envisagé isolément [spectre (C_m)] est $\frac{1}{2}\left[\overline{\frac{a_2^2(t)}{2A_0}}\right]^2$, et il serait faux de l'ajouter de façon indépendante à la puissance du signal puisque, au contraire, ce terme est négligeable à côté de $\frac{1}{2}\overline{a_2^2(t)}$.

Le composant périodique, dont l'amplitude est infiniment petite du second ordre, n'intervient donc que par suite de sa corrélation avec le signal avec lequel il donne le double produit

$$2A_0\overline{\frac{a_2^2(t)}{2A_0}} = \overline{a_2^2(t)}.$$

Le spectre résultant de (A_m) (signal) et (C_m) (composant à peu près périodique) est donc obtenu comme suit :

Soit y_A l'ordonnée du point courant M de (A_m) et y_C l'ordonnée, correspondant à la même valeur de ω, du point N de (C_m). L'ordonnée résultante est (*fig.* 15)

$$y_A + 2\sqrt{y_A y_C}.$$

L'oscillation B (bruit incohérent) étant non corrélée avec A et C, le spectre moyen (B_m) est absolument indépendant des deux autres. Il ajoute donc simplement sa puissance au spectre résultant de (A_m) et (C_m).

Précisons, là encore, que si $a_1(t)$ est l'amplitude à l'instant t du terme de Rice en phase (ou en opposition de phase) avec le signal, la perturbation

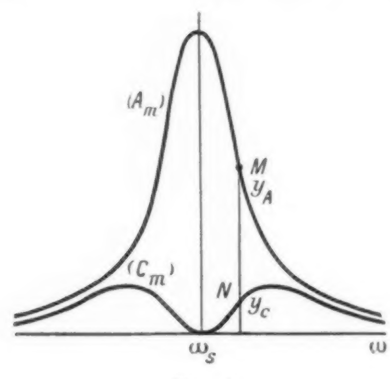


Fig. 15.

d'amplitude du premier ordre que subit le signal est $a_1(t)$, et la puissance moyenne que fournit ce terme est

$$\frac{1}{2}\overline{a_1^2(t)}.$$

Elle est du même ordre que le double produit

$$2A_0\frac{\overline{a_2^2(t)}}{2A_0} = \overline{a_2^2(t)}$$

précédent et nous retrouvons encore l'indépendance des effets des deux composants de Rice, résultat classique lorsque le système perturbé par le bruit est linéaire.

Il est aisé de voir aussi que l'étalement des spectres

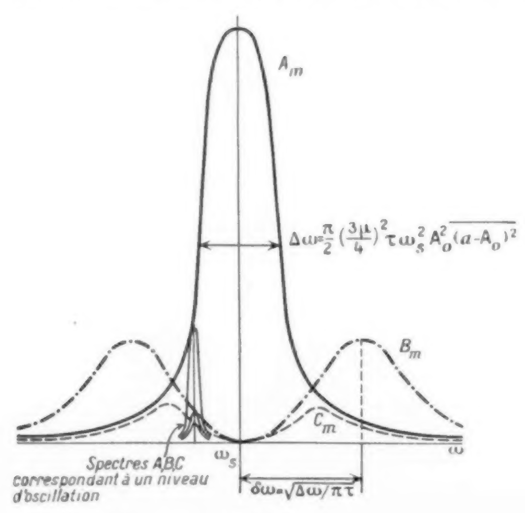


Fig. 16.

introduit par la dépendance fréquence-amplitude ne modifie pas les puissances totales relatives aux différents spectres. Elles sont toujours données par les formules du paragraphe II.A.1.*b*.

Application a l'oscillateur TG-TP. — Prenons pour nouvel exemple l'oscillateur « Tuned grid-tuned plate » représenté sur le schéma de la figure 17. Les caractéristiques du circuit oscillant de grille seront les mêmes que celles des exemples précédents :

$$L = 1\,\mu\text{H},\qquad f = 30\ \text{Mc/s},\qquad r = 1{,}25\ \Omega,$$
$$Q = 150,\qquad T_k = 293^\circ\text{K}.$$

Pour une amplitude stabilisée théorique de 1 V, la constante de temps de réaction τ vaut

$$\tau = \frac{1}{2\varepsilon\omega_s} = -\frac{LC}{MS_0 + rC} = 18.10^{-7}\ \text{s},$$

ce qui donne pour *largeur de raie du signal* $\Big($$\mu$ étant

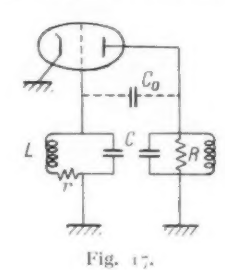


Fig. 17.

défini à partir de la formule (19) : $f = f_0\left[1 + \frac{3\mu}{8}a^2\right]\Big)$:

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3\mu}{4}\right)^2\tau\omega_s^2 A_0^2\overline{(a - A_0)^2} = 17\left(\frac{3\mu}{4}\right)^2.$$

Il est assez difficile d'évaluer μ. Nous utiliserons pour l'exemple choisi une formule, démontrée antérieurement [2], qui permet de calculer μ à partir de la capacité interélectrode grille-plaque C_e, du coefficient de courbure de la caractéristique b, et de la résistance en parallèle du circuit oscillant de plaque vu des bornes plaque et cathode, R. On a

$$\mu = -\frac{3}{8}\frac{C_0}{C}bR.$$

R est de l'ordre de $10^4\,\Omega$ au voisinage de la résonance. Pour $C_0 = 3$pF, et pour le circuit oscillant de grille donné dont la capacité C vaut 28 pF, on a

$$\mu = 0{,}3,$$

d'où en définitive

$$\Delta\omega = 0{,}8\quad (2\pi\,\text{c/s})\qquad \text{ou}\qquad \frac{\Delta\omega}{\omega_s} \simeq 3.10^{-8}.$$

On évaluera de même l'écart entre les maxima du spectre du bruit incohérent (B_m) et la raie moyenne de pulsation ω_s. On trouve

$$\delta\omega = \sqrt{\frac{\Delta\omega}{\pi\tau}} = \sqrt{\frac{0,8}{\pi . 18 . 10^{-7}}} = 3,7 . 10^2 \quad (2\pi \text{ c/s}).$$

La dépression centrale du spectre du bruit incohérent est donc trop étroite pour pouvoir être décelée avec les moyens actuels. Les amplificateurs les plus sélectifs ont encore, en effet, une largeur de bande de quelques kc/s dans les conditions d'utilisation les plus favorables.

Par ailleurs, le signal de largeur 0,8 (2π c/s) doit être encore assimilé à une raie parfaitement fine.

On voit, en définitive, qu'il y a peu de différence en pratique entre ce cas et celui d'un oscillateur à fréquence indépendante de l'amplitude.

Les divergences entre la théorie complète et la théorie simplifiée sont d'un ordre de grandeur trop faible pour être décelées expérimentalement lorsqu'on mesure des puissances de bruit. Nous avons vu qu'au contraire ces écarts sont d'une grande importance si l'on examine l'influence du bruit sur la fréquence du signal. Cela provient de l'extrême précision avec laquelle on sait comparer deux fréquences.

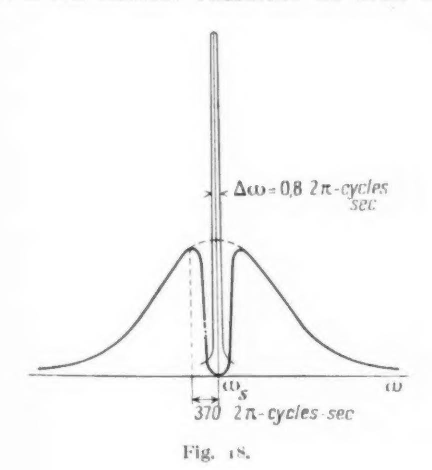


Fig. 18.

3. La méthode du diagramme mobile appliquée au phénomène général.

Lorsque les oscillateurs sont un peu compliqués, on en est réduit à rechercher des approximations, malheureusement les calculs deviennent très vite inextricables. Ils donnent néanmoins des résultats qualitatifs et leurs résultats quantitatifs peuvent être complétés par une méthode semi-empirique : on construit, en utilisant les résultats expérimentaux, le diagramme de Nyquist de l'oscillateur.

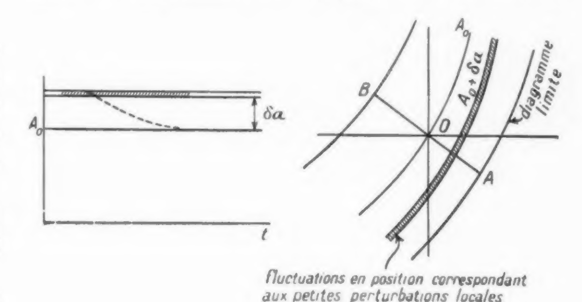


Fig. 19.

Il est donc utile de rattacher encore les résultats précédents aux propriétés du diagramme de Nyquist mobile. On y parvient de la façon suivante :

A chaque niveau d'oscillation $A_0 + \delta a$ correspond un diagramme de Nyquist dont la position sur le plan complexe est définie à de petites fluctuations près (*fig.* 19). Ces fluctuations sont dues aux petites irrégularités locales de δa produites par les chocs naturels successifs.

Ces petites fluctuations en position sont négligeables, de même que les petites irrégularités locales de l'amplitude d'oscillation sont négligeables à côté de δa. De plus, pendant un laps de temps de l'ordre de τ (durée de vie moyenne d'un niveau), l'amplitude d'oscillation pouvant être considérée comme constante, le diagramme est à peu près fixe et se confond avec le diagramme de Nyquist de l'oscillateur linéaire tangent.

On est ainsi ramené, pour chaque valeur de l'amplitude, à un problème apparemment linéaire, mais il serait faux, comme nous l'avons précisé plus haut, d'en déduire la largeur spectrale. Cette largeur est, en effet, imposée par la durée de vie du niveau et non par les propriétés du diagramme, pour le niveau donné.

Considérant ensuite tous les niveaux possibles, on est amené à suivre les déformations du diagramme et à représenter sur le plan complexe la « trajectoire de l'oscillateur » [1].

Rappelons ce que nous entendons par là : pour chaque position du diagramme existe un point correspondant à la pulsation réelle de l'oscillation naturelle; c'est le lieu de ce point, lorsque le dia-

gramme se déforme, que nous avons appelé « trajectoire de l'oscillateur ».

Nous avons montré antérieurement qu'elle se réduit, au voisinage de la stabilisation théorique, à un petit segment de droite passant par l'origine, trajectoire orthogonale du diagramme mobile (segment AB de la figure 19).

Les écarts à la moyenne de la fréquence instantanée du signal naturel sont donnés immédiatement par la position du point représentatif sur ce segment, et les valeurs limites de cette fréquence instantanée correspondent aux extrémités A et B du segment.

Il serait cependant beaucoup plus difficile de déduire du graphique la largeur du spectre du signal. Comme nous l'avons vu, en effet, cette largeur ne peut être obtenue qu'en tenant compte de la corrélation existant entre les divers niveaux, corrélation qui n'est pas apparente sur le diagramme mobile.

CONCLUSION. RÉDUCTION DE LA BANDE DE BRUIT.

L'étude précédente nous conduit aux conclusions suivantes :

1° Il n'est généralement pas nécessaire, dans la détermination de la puissance du bruit qui se superpose à la raie du signal, de tenir compte de la loi fréquence-amplitude. L'absence d'appareils de mesure assez sélectifs pour observer la « structure fine » du spectre de bruit dans le proche voisinage de la raie du signal autorise, en effet, l'emploi des formules approchées du paragraphe A.

Il était cependant nécessaire de s'en assurer car nous avons constaté l'importance de l'effet fréquence-amplitude dans d'autres domaines d'application nécessitant une définition plus rigoureuse de la fréquence d'oscillation : horloges radioélectriques, maîtres oscillateurs des émetteurs de radiodiffusion, etc.

2° *Le principal facteur* qui influe sur la bande de bruit est la constante de temps de réaction τ de l'oscillateur. Nous conclurons donc en discutant ici les conditions expérimentales qui influent sur ce facteur critique; pour cela, nous exprimerons les formules du paragraphe A à partir du paramètre τ, et non plus de l'inductance mutuelle fictive de couplage M.

Nous avons vu que τ est relié simplement à l'inductance mutuelle fictive et aux autres données du circuit définies dans le texte : S_0, b, r, C, L, ω_0, par

$$\tau = -\frac{1}{(MS_0 + rC)\omega_0^2},$$

d'où l'on déduit rapidement :

a. la largeur de la bande de bruit sur laquelle se détache la raie du signal :

$$\Delta\omega = -\pi\omega_0^2(MS_0 + rC) = \frac{\pi}{\tau};$$

b. la surface de cette bande de bruit ou, autrement dit, la puissance de bruit recueillie sur la grille de la lampe en même temps que le signal (dont nous avons supposé l'amplitude stabilisée égale à 1 V) :

$$B = -\frac{kT_k r}{4(MS_0 + rC)} = \frac{kT_k r}{4}\omega_0^2\tau.$$

L'analogie qui est apparue entre l'oscillateur stabilisé et un pendule amorti de même constante de temps τ conduit à généraliser la théorie, et ces formules, au cas où l'équation d'oscillation serait beaucoup plus compliquée que celle que nous avons prise pour type. On pourra, par exemple, aborder grâce à elles l'étude de l'oscillateur klystron.

Relation d'incertitude entre largeur et puissance de bruit.

Une remarque importante : le facteur τ agit en sens contraire sur $\Delta\omega$ et sur B.

Lorsque τ croît, la puissance de bruit croît proportionnellement mais la bande de bruit se resserre autour de la raie centrale du signal. On aura donc généralement intérêt à donner à τ une valeur aussi réduite que possible, puisque la bande de bruit sera ensuite limitée naturellement par les systèmes sélectifs de sortie : c'est le cas, en particulier, de la spectrographie hertzienne où l'amplificateur a une bande très étroite, de l'ordre de quelques kc/s pour une fréquence centrale de plusieurs Mc/s.

On est limité, cependant, pour les faibles valeurs de τ par la forme relaxée que prend la porteuse, ce qui donne lieu à des inconvénients d'une autre nature : influence importante du circuit, de l'instabilité des tensions d'alimentation, etc.

Il y a évidemment une valeur de τ optimum que l'on doit rechercher.

Les conditions expérimentales optima.

Il est commode, dans la recherche des règles générales assurant une réduction du bruit, de se reporter à une expression significative de τ, que nous

avons indiquée dans un précédent Mémoire [1] et que nous rappelons

$$\tau = \frac{1}{A_0} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial \omega} & -\frac{\partial V}{\partial \omega} \\ \frac{\partial V}{\partial \omega} & \frac{\partial U}{\partial \omega} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial a} & \frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial \omega} \end{vmatrix}}.$$

U et V sont les coordonnées du point courant du diagramme de Nyquist mobile (*fig.* 20). Ce sont donc des fonctions de l'amplitude a et de la pulsation ω. Les dérivées partielles sont prises dans les conditions de la stabilisation, pour $a = A_0$ et $\omega = \omega_s \simeq \omega_0$.

Afin de nous ramener à des notations plus usitées,

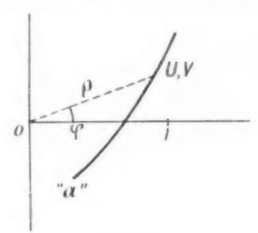


Fig. 20.

nous effectuerons le changement de variable qui fait passer des coordonnées cartésiennes U, V aux coordonnées polaires ρ, φ. On trouve alors rapidement

$$\tau = \frac{1}{A_0} \frac{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2}{\left[\frac{\partial \rho}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\partial \rho}{\partial \omega}\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right]\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right)^2.$$

Les conditions assurant à τ une valeur aussi petite que possible, c'est-à-dire à la bande de bruit parasite *une grande largeur et une faible surface*, apparaissent clairement :

a. L'amplitude stabilisée A_0 doit être aussi grande que possible. En d'autres termes, *on doit fonctionner aussi loin que possible de l'accrochage* sans trop relaxer, toutefois, la forme de la porteuse.

b. Le dénominateur doit être grand lui aussi, or la condition

$$\rho\left[\frac{\partial \rho}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} - \frac{\partial \rho}{\partial \omega}\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right] = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial U}{\partial \omega} = 0$$

est la condition d'accrochage [11].

Nous retrouvons sous une autre forme la règle énoncée ci-dessus.

c. Pour une distance à l'accrochage donnée, $\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}$ *doit avoir une faible valeur.* C'est dire que le déphasage apporté par la boucle complète « lampe d'entretien-circuit de couplage » doit varier très peu avec la fréquence. La caractéristique de phase de cette boucle est alors très applatie, et la réaction a un effet notable sur une large gamme de fréquences.

On comprend que le spectre de bruit soit alors très étalé.

d. Le facteur $\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}\right)^2$ doit être, lui aussi, petit. ρ étant voisin de 1, $\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$ doit être aussi petit que possible.

Les diverses conditions conduisant à un spectre de bruit très étalé énumérées ci-dessus sont les mêmes que celles qu'indique R. M. Lerner dans son Mémoire. Les conclusions que nous en tirons concernant les conditions expérimentales les plus favorables sont cependant strictement opposées et cela se comprend bien :

L'oscillateur de R. M. Lerner ne fournissant d'autre signal que le bruit de sortie provenant d'un bruit d'entrée amplifié avec une extrême sélectivité, il est bien évident que l'on doit rechercher les conditions qui donnent un bruit de sortie aussi monochromatique que possible.

L'oscillateur que nous avons examiné fournit au contraire, de façon autonome, un signal entretenu et quasi monochromatique. Nous cherchons, de notre côté, à étaler le plus possible la bande de bruit de sortie de façon à pouvoir la découper judicieusement.

De plus, nous constatons que, bien que les hypothèses de départ soient très différentes, les mêmes paramètres interviennent dans les deux cas de façon analogue. Cela provient de ce que la constante de temps de réaction τ qui impose notre largeur spectrale et la constante de temps de l'oscillateur linéaire tangent qui intervient dans la théorie de R. M. Lerner se confondent *au voisinage de l'accrochage.* La divergence entre les deux théories disparaît donc à la limite asymptotiquement.

Nos résultats sont aussi en accord avec ceux de A. Spaelti [12] publiés en 1948, néanmoins les conclusions de cet auteur sont les mêmes que celles de R. M. Lerner $\left(\text{grande valeur de } \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\right)$ pour les raisons indiquées plus haut.

ANNEXE I.

a. Nous déterminerons la fonction de corrélation du signal dont l'amplitude est modulée par des termes aléatoires, infiniment petits du premier et du second ordre. Sa phase est aussi modulée par des termes infiniment petits.

Nous examinerons ensuite la forme des termes perturbateurs pour le cas qui nous intéresse.

Soit

$$V(t) = [A_0 + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2^2(t)] \sin(\omega_0 t + \mu)$$

le signal légèrement modulé en amplitude et en phase. Formons le produit $V(t)V(t+t^*)$. On a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 2 [par exemple de la forme $\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_2^2(t+t^*)$, $\varepsilon_2^2(t)\,\varepsilon_2^2(t+t^*)$, ...] :

$$\begin{aligned} V(t)V(t+t^*) = \frac{1}{2}[&A_0^2 + A_0\varepsilon_1(t) + A_0\varepsilon_1(t+t^*) + A_0\varepsilon_2^2(t) \\ &+ A_0\varepsilon_2^2(t+t^*) + \varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)] \\ &\times \{\cos[\omega_0 t^* + \mu(t+t^*) - \mu(t)] \\ &- \cos[2\omega_0 t + \omega_0 t^* + \mu(t+t^*) + \mu(t)]\}. \end{aligned}$$

Prenons sa moyenne. On voit que le terme en $\cos 2\omega_0 t$, à variation rapide, n'intervient pas. On a de plus

$$\overline{\varepsilon_1(t)} = \overline{\varepsilon_1(t+t^*)} = 0,$$

ce qui permet de ramener l'expression $\overline{V(t)V(t+t^*)}$ à la forme plus simple

$$\begin{aligned} &\overline{V(t)V(t+t^*)} \\ &= \frac{1}{2}\overline{[A_0^2 + \varepsilon_1(t)\varepsilon_1(t+t^*) + A_0\varepsilon_2^2(t) + A_0\varepsilon_2^2(t+t^*)]} \\ &\quad \times \overline{\cos[\omega_0 t^* + \mu(t+t^*) - \mu(t)]} \end{aligned}$$

ou

$$(24) \qquad \begin{aligned} \overline{V(t)V(t+t^*)} = \frac{1}{2}&\overline{[A_0^2 + \varepsilon_1(t)\varepsilon_1(t+t^*) + A_0\varepsilon_2^2(t) + A_0\varepsilon_2^2(t+t^*)]} \\ &\times \overline{\{\cos[\mu(t+t^*) - \mu(t)]\cos\omega_0 t^* - \sin[\mu(t+t^*) - \mu(t)]\sin\omega_0 t^*\}}, \end{aligned}$$

$\mu(t+t^*) - \mu(t)$ étant une variable gaussienne, on vérifie sans peine que l'on a

$$\overline{\sin[\mu(t+t^*) - \mu(t)]} = 0$$

et

$$\overline{\cos[\mu(t+t^*) - \mu(t)]} = e^{-\frac{1}{2}\overline{[\mu(t+t^*) - \mu(t)]^2}}.$$

Comme, de plus, dans le cas qui nous intéresse $\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)$ et $\varepsilon_2^2(t)$ varient avec t beaucoup plus vite que $\cos[\mu(t+t^*) - \mu(t)]$, l'expression de la fonction de corrélation moyenne se réduit à

$$(25) \qquad \begin{aligned} &\overline{V(t)V(t+t^*)} \\ &= \frac{1}{2}\left[A_0^2 + A_0\overline{\varepsilon_2^2(t)} + A_0\overline{\varepsilon_2^2(t+t^*)}\right] e^{\varphi(t^*)}\cos\omega_0 t^* \\ &\quad + \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}\, e^{\varphi(t^*)}\cos\omega_0 t^*, \end{aligned}$$

en posant

$$\varphi(t^*) = -\frac{1}{2}\overline{[\mu(t+t^*) - \mu(t)]^2} = K t^*$$

(K, constante de proportionnalité très petite).

On peut aussi remarquer que $\mu(t+t^*) - \mu(t)$ garde longtemps une valeur très faible et, tant qu'il en est ainsi, remplacer dans l'expression (24) $\cos[\mu(t+t^*) - \mu(t)]$ et $\sin[\mu(t+t^*) - \mu(t)]$ par des développements limités aux premiers termes.

On trouve alors pour fonction de corrélation moyenne l'expression

$$(26) \qquad \begin{aligned} \overline{V(t)V(t+t^*)} = \frac{1}{2}\Big[&A_0^2 - A_0^2\overline{\mu(t)\,\mu(t+t^*)} \\ &+ A_0\overline{\varepsilon_2^2(t)} + A_0\overline{\varepsilon_2^2(t+t^*)} \\ &- \frac{1}{2}A_0^2\overline{\mu^2(t)} \\ &- \frac{1}{2}A_0^2\overline{\mu^2(t+t^*)} \\ &+ \overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}\Big]\cos\omega_0 t^* \end{aligned}$$

(en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur à 2) qui est, comme on le vérifie rapidement, une approximation de l'expression (25) tant que $\varphi(t^*)$ est petit.

Sous la forme (25), on voit que l'exponentielle $e^{\varphi(t^*)}$ conduit à un léger élargissement de la raie du signal, ainsi que de celle du composant périodique (élargissement évalué précédemment, II.A.2°).

Une très légère modification est aussi apportée au spectre continu, correspondant à la fonction de corrélation

$$\psi(t^*) = \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}\cos\omega_0 t^*.$$

Il n'y a cependant pas lieu d'en tenir compte car la largeur de corrélation de cette dernière fonction est beaucoup plus étroite que celle de la fonction $e^{\varphi(t^*)}\cos\omega_0 t^*$ et par suite, tant que $\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}$ est différent de zéro, $e^{\varphi(t^*)}$ est très voisin de 1. Par

ailleurs, pour les valeurs de t^* rendant $e^{\lambda t^*}$ différent de 1, $\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}$ est nul.

Une approximation de l'expression (25), est donnée par l'expression (26). On a, tant que t^* n'est pas trop grand

$$\overline{[\mu(t+t^*)-\mu(t)]^2} = 2Kt^* \simeq 0$$

D'où

$$2A_0^2\overline{\mu(t)\mu(t+t^*)} - A_0^2\overline{\mu^2(t)} - A_0^2\overline{\mu^2(t+t^*)} \simeq 0$$

et l'expression (26) s'écrit

$$\overline{V(t)V(t+t^*)} \simeq \frac{1}{2}\left[A_0^2 + A_0\overline{\varepsilon_2^2(t)} + A_0\overline{\varepsilon_2^2(t+t^*)}\right]\cos\omega_0 t^* + \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}\cos\omega_0 t^*.$$

Le calcul de ε_1 et ε_2, effectué plus loin, permet de l'identifier à l'expression (13).

Il est intéressant d'examiner à cette occasion, et de comparer avec le problème traité ici, le cas où la largeur de corrélation de $\mu(t)$ serait du même ordre que celle de $\varepsilon_1(t)$. C'est ce qui a lieu, comme on le vérifie facilement, lorsque le système attaqué par le bruit (supposé faible) est *linéaire* amorti. $\mu(t)$ reste toujours assez petit pour que l'on ait le droit d'utiliser l'expression approchée (26).

On vérifie aisément que, dans ce cas

$$-\frac{1}{2}\left[A_0^2\overline{\mu^2(t)} + A_0^2\overline{\mu^2(t+t^*)}\right]$$

ne disparaît pas avec $A_0^2\,\overline{\mu(t)\,\mu(t+t^*)}$ mais, au contraire, disparaît avec

$$A_0\overline{\varepsilon_2^2(t)} + A_0\overline{\varepsilon_2^2(t+t^*)}.$$

La fonction de corrélation $\overline{V(t)\,V(t+t^*)}$ se réduit alors à

$$\overline{V(t)V(t+t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2\cos\omega_0 t^* + \frac{1}{2}A_0^2\overline{\mu(t)\mu(t+t^*)}\cos\omega^*{}_0 t + \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}\cos\omega_0 t^*.$$

A la raie du signal, de puissance $\frac{1}{2}A_0^2$, se superposent donc deux spectres continus correspondant aux fonctions de corrélation

$$\overline{\psi_1(t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2\overline{\mu(t)\mu(t+t^*)}\cos\omega_0 t^*,$$

$$\overline{\psi_2(t^*)} = \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_1(t)\,\varepsilon_1(t+t^*)}\cos\omega_0 t^*.$$

On retrouve bien un résultat déjà mentionné. Nous le résumerons en disant que l'un des deux spectres continus composants est dû à la corrélation de phase, tandis que l'autre est dû à la corrélation d'amplitude.

Nous retrouvons sous une autre forme l'indépendance des deux termes de Rice dans leur rôle déphaseur et perturbateur d'amplitude. La non-linéarité conserve cette indépendance mais, rendant infinie la mémoire de phase du système, elle rend aussi infinie la largeur de corrélation de la phase et conduit à l'écrasement de l'un des deux spectres précédents.

b. **Calcul des termes perturbateurs $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ et $\mu(t)$.**

Nous envisagerons d'abord le cas d'un choc unique (à l'instant t_j) et nous déterminerons la variation d'amplitude instantanée qu'il apporte à la sinusoïde théorique, sans nous préoccuper du déphasage. Ce dernier sera examiné ensuite.

Si l'on appelle Δa_1 et Δa_2 les amplitudes *à l'instant du choc* des composants élémentaires de Rice, en phase et en quadrature, on vérifie aisément, comme dans l'exemple du paragraphe II.A.1.*b*, que les variations d'amplitude du premier et du second ordre apportées au signal théorique sont Δa_1 et $\frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0}$.

Nous tiendrons compte ensuite de la décroissance exponentielle de ces perturbations, l'oscillateur tendant vers le régime théorique. Pour cela, nous représenterons ce régime transitoire par

$$V(t) = \left[A_0 + \Delta a_1\,e^{-\lambda(t-t_j)} + \frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0}\,e^{-\lambda(t-t_j)}\right]\sin\omega_0 t.$$

Il suffit alors, pour mettre en évidence le déphasage produit par le choc élémentaire, de remplacer cette expression par

$$(27)\quad V(t) = \left[A_0 + \Delta a_1\,e^{-\lambda(t-t_j)} + \frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0}\,e^{-\lambda(t-t_j)}\right] \times \sin\left[\omega_0 t + \frac{\Delta a_2}{A_0}\right].$$

Un dernier point reste à préciser : les équations (11) et (12), et par suite l'expression (27) qui s'en déduit, ont été obtenues en négligeant les infiniment petits du second ordre dans la résolution de l'équation (8). Il faut maintenant déterminer ces infiniment petits du second ordre *introduits par la non-linéarité*. Pour cela, nous nous reporterons à l'équation (8) et nous en chercherons une approximation du second ordre.

Considérant les termes du second ordre comme

correctifs, on obtient en y remplaçant V_1 et V_2 par leurs valeurs de première approximation

$$V_1 = \Delta a_1 \, e^{-\lambda(t-t_j)} \sin \omega_0 t, \qquad V_2 = \Delta a_2 \cos \omega_0 t,$$

et en négligeant les harmoniques 2, 3, ... :

$$\begin{aligned}(28) \qquad & (V_1'' + 4\varepsilon\omega_0 V_1' + \omega_0^2 V_1) + (V_2'' + \omega_0^2 V_2) \\ & + \left[\varepsilon\omega_0^2\sqrt{\beta}(\Delta a_2)^2 + 3\varepsilon\omega_0^2\sqrt{\beta}(\Delta a_1)^2 e^{-2\lambda(t-t_j)}\right]\cos\omega_0 t \\ & - 2\varepsilon\omega_0^2\sqrt{\beta}(\Delta a_1)(\Delta a_2)\, e^{-\lambda(t-t_j)} \sin\omega_0 t \\ = {} & \omega_0^2 \, G_1(t-t_j) + \omega_0^2 \, G_2(t-t_j).\end{aligned}$$

Les équations (11) et (12) devront donc être remplacées par

$$\begin{aligned}(29) \quad & V_1'' + 4\varepsilon\omega_0 V_1' + \omega_0^2 V_1 \\ & = \omega_0^2 \, G_2(t-t_j) - \left[\varepsilon\omega_0^2\sqrt{\beta}(\Delta a_2)^2 \right. \\ & \qquad \left. + 3\varepsilon\omega_0^2\sqrt{\beta}(\Delta a_1)^2 e^{-2\lambda(t-t_j)}\right]\cos\omega_0 t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(30) \quad & V_2'' + \omega_0^2 V_2 = \omega_0^2 \, G_2(t-t_j) \\ & \qquad + 2\varepsilon\omega_0^2\sqrt{\beta}(\Delta a_1)(\Delta a_2)\, e^{-\lambda(t-t_j)} \sin\omega_0 t.\end{aligned}$$

L'équation (29) nous permet de préciser le développement limité au second ordre de V_1. En effet $(\Delta a_2)^2$ est constant et $(\Delta a_1)^2 \, e^{-2\lambda(t-t_j)}$ lentement variable, on a donc

$$V_1(t) = \left[(\Delta a_1) e^{-\lambda(t-t_j)} - \frac{3(\Delta a_1)^2}{2A_0} e^{-2\lambda(t-t_j)} - \frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0}\right]\sin\omega_0 t$$

$$\left(\text{avec} \quad A_0 = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\right),$$

$V_2(t)$ vaut de même

$$V_2(t) = (\Delta a_2)\cos\omega_0 t$$

(il est inutile de développer V_2 au second ordre puisque ce terme est en quadrature avec le signal, et que les termes du second ordre de son développement limité conduiraient à des infiniment petits d'ordre supérieur dans le calcul de l'amplitude résultante).

Le calcul de

$$V(t) = V_0(t) + V_1(t) + V_2(t)$$

nous donne une expression de même forme que (27), au terme $\frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0} e^{-\lambda(t-t_j)} \sin \omega_0 t$ près. On a, en effet

$$\begin{aligned}V(t) &= V_0(t) + V_1(t) + V_2(t) \\ &= \left[(\Delta a_1) e^{-\lambda(t-t_j)} - \frac{3(\Delta a_1)^2}{2A_0} e^{-2\lambda(t-t_j)} - \frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0}\right]\sin\omega_0 t \\ &\quad + (\Delta a_2)\cos\omega_0 t + A_0 \sin\omega_0 t \\ &\sim \left[A_0 + (\Delta a_1)\, e^{-\lambda(t-t_j)} - \frac{3(\Delta a_2)^2}{2A_0} e^{-2\lambda(t-t_j)}\right] \\ &\qquad \times \sin\left[\omega_0 t + \frac{\Delta a_2}{A_0}\right].\end{aligned}$$

Ce terme supplémentaire est une intégrale convenablement choisie de l'équation (29) sans second membre. On a donc, en définitive

$$\begin{aligned}V(t) = {} & \left[A_0 + (\Delta a_1) e^{-\lambda(t-t_j)} + \frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0} e^{-\lambda(t-t_j)} \right. \\ & \left. - \frac{3(\Delta a_1)^2}{2A_0} e^{-2\lambda(t-t_j)}\right] \sin\left[\omega_0 t + \frac{\Delta a_2}{A_0}\right].\end{aligned}$$

On se ramènera simplement au cas où les chocs sont nombreux et répartis au hasard dans le temps en sommant sur les t_j. On trouve enfin :

$$\varepsilon_1(t) = \sum_j (\Delta a_1)\, e^{-\lambda(t-t_j)},$$

$$\varepsilon_2^2(t) = \sum_j \frac{(\Delta a_2)^2}{2A_0} e^{-\lambda(t-t_j)} - \sum_j \frac{3(\Delta a_1)^2}{2A_0} e^{-2\lambda(t-t_j)},$$

$$\mu(t) = \sum_j \frac{\Delta a_2}{A_0},$$

avec

$$\Delta a_1 = q_2 \omega_0, \qquad \Delta a_2 = q_1 \omega_0.$$

ANNEXE II.

Le signal dont nous voulons déterminer le spectre de puissance est formé de tronçons de sinusoïdes, de même amplitude A_0, de même pas T_0, légèrement déphasés de façon aléatoire les uns par rapport aux autres. Ces sauts de phase d'un tronçons au suivant sont extrêmement petits et indépendants les uns des autres.

Le tronçon de sinusoïde débutant à l'instant zéro a pour équation

$$y_1(t) = A_0 \sin\omega_0 t \qquad (0 \leq t \leq \Delta t_0)$$

(Δt_0, durée de vie de ce tronçon).

Celui qui débute à un autre instant t_j a pour équation

$$y_2(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \Delta\Phi) \qquad (t_j \leq t \leq t_j + \Delta t_j).$$

Le déphasage $\Delta\Phi$ au temps t_j est la somme de tous les petits sauts de phase antérieurs ($\Delta\varphi$). Ces derniers sont tantôt positifs, tantôt négatifs, $\Delta\varphi$ est donc nul en moyenne et nous avons calculé antérieurement son carré moyen $\Delta\Phi^2$ [2].

Formons le produit $y_1(t)\, y_2(t + t^*)$ (avec $0 \leq t \leq \Delta t_0$ et $t_j \leq t + t^*$) dont la moyenne exprime la corrélation du tronçon origine et du tronçon t_j. On a

$$y_1(t)\, y_2(t + t^*) = A_0^2 \sin\omega_0 t \sin[\omega_0 t + \omega_0 t^* + \Delta\Phi]$$

ou en transformant ce produit en différence de cos

$$y_1(t)y_2(t+t^*) = \frac{1}{2}A_0^2\{\cos(\omega_0 t^* + \Delta\Phi) - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 t^* + \Delta\Phi)\}.$$

1° Prenons la moyenne temporelle de cette expression quand t varie de zéro à Δt_0 [t^* et $\Delta\Phi$ restent fixes (*fig.* 21)]. Si nous supposons que la période T_0 du train de sinusoïde est très faible à côté de sa durée de vie Δt_0, on a

$$\overline{\cos(2\omega_0 t + \omega_0 t^* + \Delta\Phi)} \sim 0$$

et le produit moyen $\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}$ se réduit à

$$\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2\cos(\omega_0 t^* + \Delta\Phi)$$
$$= \frac{1}{2}A_0^2\cos\omega_0 t^*\cos\Delta\Phi - \frac{1}{2}A_0^2\sin\omega_0 t^*\sin\Delta\Phi.$$

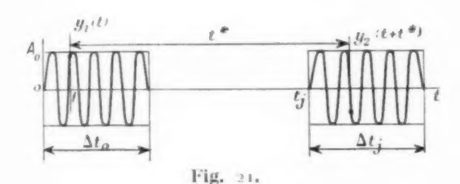


Fig. 21.

2° Laissons toujours t^* constant. Pour un grand nombre d'observations, $\Delta\Phi$ varie de façon aléatoire et l'espérance mathématique de $\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}$ est (7)

$$M_e\{\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}\} = \frac{1}{2}A_0^2\cos\omega_0 t^* M_e\{\cos\Delta\Phi\} - \frac{1}{2}A_0^2\sin\omega_0 t^* M_e\{\sin\Delta\Phi\},$$

$\Delta\Phi$ étant une variable gaussienne, on a

$$M_e\{\sin\Delta\Phi\} = 0,$$
$$M_e\{\cos\Delta\Phi\} = e^{-\frac{1}{2}M_e\{\Delta\Phi^2\}}.$$

D'où

$$M_e\{\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}\} = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\frac{1}{2}M_e\{\Delta\Phi^2\}}\cos\omega_0 t^*.$$

3° Le raisonnement étant valable quel que soit le tronçon de sinusoïde choisi pour origine, on voit que l'on peut confondre l'espérance mathématique $M_e[\Delta\Phi^2]$ avec sa moyenne temporelle, et que l'expression ci-dessus représente la fonction de corrélation moyenne du signal :

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\frac{1}{2}\overline{\Delta\Phi^2}}\cos\omega_0 t^*.$$

On retrouve le résultat classique connu [3].

On a calculé antérieurement [2] la valeur de $\overline{\Delta\Phi^2}$ à partir de la résistance génératrice de bruit r et de sa température absolue T_k. On a trouvé

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \frac{kT_k r\omega_0^2 t^*}{A_0^2}.$$

On a donc

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\frac{1}{2A_0^2}kT_k r\omega_0^2 t^*}\cos\omega_0 t^*. \tag{31}$$

La largeur spectrale $\Delta\omega$ s'en déduit immédiatement. On a

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{2A_0^2}kT_k r\omega_0^2. \tag{32}$$

ANNEXE III.

Le problème est analogue à celui qui vient d'être examiné dans l'annexe II. Le signal est formé de tronçons de sinusoïdes, de même amplitude A_0, de durée moyenne τ, mis bout à bout. Cependant, nous supposerons ici que le pas des divers trains d'onde varie de façon aléatoire.

Un tronçon de sinusoïde donné, débutant à l'instant t^*, diffère du tronçon commençant à l'instant zéro à la fois par son pas et par sa phase. Sa phase dépend de tous les tronçons qui le précèdent, au contraire son pas est indépendant des tronçons antérieurs.

Soit

$$y_1(t) = A_0\sin\omega_0 t, \qquad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq \Delta t_0,$$

l'équation du tronçon origine (8) et

$$y_2(t) = A_0\sin(\omega t + \Delta\Phi), \qquad \text{avec} \quad t_j \leq t \leq t_j + \Delta t_j$$

l'équation de celui qui débute à l'instant t_j.

Formons encore le produit $y_1(t)y_2(t+t^*)$, avec $0 \leq t \leq \Delta t_0$ et $t_j \leq t + t^*$. On a

$$y_1(t)y_2(t+t^*) = A_0^2\sin\omega_0 t\sin(\omega t + \omega t^* + \Delta\Phi)$$

ou

$$y_1(t)y_2(t+t^*) = \frac{1}{2}A_0^2\{\cos[(\omega-\omega_0)t + \omega t^* + \Delta\Phi] - \cos[(\omega+\omega_0)t + \omega t^* + \Delta\Phi]\}.$$

(7) Nous désignons une espérance mathématique par $M_e[\ \ ]$.

(8) ω_0 ne désigne pas, ici, la pulsation d'amorçage mais la pulsation du tronçon origine.

1° Prenons la moyenne temporelle de cette expression quand t varie de zéro à Δt_0 (t^*, $\Delta\Phi$ et ω restent fixes). Les variations de $\cos[(\omega + \omega_0)t + \omega t^* + \Delta\Phi]$ sont encore très rapides et l'on a toujours

$$\overline{\cos[(\omega + \omega_0)t + \omega t^* + \Delta\Phi]} \sim 0.$$

Comme ω reste toujours très voisin de ω_0, les variations de $\cos[(\omega - \omega_0)t + \omega t^* + \Delta\Phi]$ sont au contraire très lentes et la moyenne temporelle de $y_1(t)y_2(t + t^*)$ se réduit à

$$\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2\,\{\overline{\cos[(\omega-\omega_0)t + \omega t^* + \Delta\Phi]}\}$$

$$\text{pour} \quad 0 \leq t \leq \Delta t_0$$

ou

$$\begin{aligned}\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)} = {} & \frac{1}{2}A_0^2\cos(\omega t^* + \Delta\Phi)\,\overline{\cos(\omega-\omega_0)t} \\ & -\frac{1}{2}A_0^2\sin(\omega t^* + \Delta\Phi)\,\overline{\sin(\omega-\omega_0)t} \\ & (0 \leq t \leq \Delta t_0),\end{aligned}$$

$(\omega - \omega_0)\,t$ restant très faible (ω très voisin de ω_0, $0 \leq t \leq \Delta t_0$) on peut remplacer $\cos(\omega - \omega_0)t$ et $\sin(\omega - \omega_0)t$ par les premiers termes de leurs développements de Taylor et écrire

$$\overline{\cos(\omega-\omega_0)t} = 1 - \frac{\overline{(\omega-\omega_0)^2t^2}}{2} = 1 - (\omega-\omega_0)^2\frac{(\Delta t_0)^2}{6}$$

$$\overline{\sin(\omega-\omega_0)t} = \overline{(\omega-\omega_0)t} = (\omega-\omega_0)\Delta t_0.$$

On a donc, en définitive

$$\begin{aligned}\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)} = {} & \frac{1}{2}A_0^2\left[1-(\omega-\omega_0)^2\frac{\Delta t_0^2}{6}\right]\cos(\omega t^* + \Delta\Phi) \\ & -\frac{1}{2}A_0^2[(\omega-\omega_0)\Delta t_0]\sin(\omega t^* + \Delta\Phi).\end{aligned}$$

2° Supposons fixe l'intervalle t^* et la phase $\Delta\Phi$, et $\omega - \omega_0$ variable de façon aléatoire sur un grand nombre d'observations. Déterminons alors l'espérance mathématique de $\overline{y_1(t)\,y_2\,(t + t^*)}$. On a

$$\begin{aligned}& M_e\{\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}\} \\ & \quad = \frac{1}{2}A_0^2 M_e\left\{\left[1-(\omega-\omega_0)^2\frac{\Delta t_0^2}{6}\right]\cos(\omega t^* + \Delta\Phi)\right\} \\ & \qquad -\frac{1}{2}A_0^2 M_e\{(\omega-\omega_0)\Delta t_0\sin(\omega t^* + \Delta\Phi)\},\end{aligned}$$

$\omega - \omega_0$ est tantôt positif, tantôt négatif, et l'on a $M_e\,[(\omega - \omega_0)] = 0$, de plus ω reste très voisin de ω_s pulsation du régime stabilisée théorique, l'expression ci-dessus se réduit donc à

$$\begin{aligned}& M_e\{\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}\} \\ & \quad \simeq \frac{1}{2}A_0^2\cos(\omega_s t^* + \Delta\Phi)\,M_e\left\{1-(\omega-\omega_0)^2\frac{\Delta t_0^2}{6}\right\}\end{aligned}$$

3° t^* étant encore fixe, il ne nous reste plus qu'à supposer $\Delta\Phi$ variable de façon aléatoire sur un grand nombre d'observations et à déterminer l'espérance mathématique de l'expression précédente. On trouve, comme dans l'annexe II :

$$M_e\{\cos(\omega_s t^* + \Delta\Phi)\} = e^{-\frac{1}{2}M_e\{\Delta\Phi^2\}}\cos\omega_s t^*.$$

D'où, en définitive

$$\begin{aligned}& M_e\{\overline{y_1(t)y_2(t+t^*)}\} \\ & \quad = \frac{1}{2}A_0^2\,M_e\left\{1-(\omega-\omega_0)^2\frac{\Delta t_0^2}{6}\right\}e^{-\frac{1}{2}M_e\{\Delta\Phi^2\}}\cos\omega_s t^*.\end{aligned}$$

4° On remarque encore que le raisonnement reste valable quel que soit le tronçon de sinusoïde choisi pour origine. On a donc encore le droit de confondre les espérances mathématiques qui figurent dans l'expression ci-dessus avec les moyennes temporelles. La fonction de corrélation moyenne du signal est donc

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2\left[1-\overline{(\omega-\omega_0)^2}\frac{\tau^2}{6}\right]e^{-\frac{1}{2}\overline{\Delta\Phi^2}}\cos\omega_s t^*$$

avec

$$\overline{\Delta t_0} = \tau,$$

$\overline{(\omega - \omega_0)^2}\,\frac{\tau^2}{6}$ étant petit, on peut mettre $\overline{\psi\,(t^*)}$ sous la forme équivalente au second ordre suivante :

$$\overline{\psi(t^*)} = \frac{1}{2}A_0^2\,e^{-\overline{(\omega-\omega_0)^2}\frac{\tau^2}{6}}\,e^{-\frac{1}{2}\overline{\Delta\Phi^2}}\cos\omega_s t^*,$$

avec, comme on le montre aisément,

$$\overline{(\omega-\omega_0)^2} = 2\overline{(\omega-\omega_s)^2}.$$

Il nous reste à expliciter $\overline{\Delta\Phi^2}$.

Calcul de $\overline{\Delta\Phi^2}$. — Les déphasages $\Delta\Phi$ des divers trains d'onde sont comptés par rapport à une sinusoïde servant de repère, de période T_s. Cette dernière représente l'oscillation théorique qui serait effectuée si le bruit n'intervenait pas. Ces décalages seront déterminés par la comparaison des durées de N cycles du signal réel et de N cycles du signal théorique. Néanmoins comme le pas du signal réel ne reste constant que sur des intervalles de durée moyenne τ (durée moyenne d'un train d'onde), il faudra examiner l'avance ou le retard pris par le signal réel sur le signal théorique pendant la durée de chaque train d'onde. On en déduira ensuite le carré moyen de l'écart de marche résultant sur une longue durée.

Le nombre de cycles de l'oscillation théorique, de période T_s, sur un intervalle τ est

$$n = \frac{\tau}{T_s}.$$

La durée d'un train d'onde réel de période T, ayant le même nombre de cycles n, est

$$\tau' = nT.$$

La différence des durées du train d'onde réel considéré et du train d'onde théorique correspondant est donc

$$\Delta t = n(T - T_s) = \tau \frac{T - T_s}{T_s}.$$

Un intervalle de longue durée t^* ($t^* \gg \tau$) comprend $\nu = \frac{t^*}{\tau}$ intervalles de durée τ. C'est-à-dire qu'il est formé en moyenne de ν trains d'onde de pas aléatoire. Ces divers trains d'onde présentent par rapport au signal théorique des écarts de marche qui s'additionnent algébriquement et dont la moyenne au bout du temps t^* est nulle.

Le carré moyen de l'écart résultant au bout du temps t^* a donc pour valeur

$$\nu \overline{\Delta t^2} = \frac{t^*}{\tau} \overline{\Delta t^2} = t^* \tau \overline{\left(\frac{T - T_s}{T_s}\right)^2}.$$

Cet écart de marche, produit par les fluctuations de fréquence des tronçons successifs, est équivalente à un déphasage $\Delta\Phi$ de carré moyen :

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \omega_s^2 \nu \overline{\Delta t^2}.$$

On peut exprimer $\overline{\frac{(T - T_s)^2}{T_s^2}}$ à partir de la loi de dépendance fréquence-amplitude, puisque ce sont les variations aléatoires de l'amplitude qui réagissent sur le pas des trains d'onde successifs. On obtient aisément la relation

$$\overline{\left(\frac{T - T_s}{T_s}\right)^2} \sim \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 A_0^2 \overline{(a - A_0)^2}.$$

D'où, en définitive

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \omega_s^2 t^* \tau \left(\frac{3\mu}{4}\right)^2 A_0^2 \overline{(a - A_0)^2}.$$

Remarque. — On ne tient pas compte dans ce calcul des déphasages produits par les composants déphaseurs des impulsions élémentaires; nous nous plaçons dans le cas où ces derniers sont négligeables à côté des écarts de phase dus aux fluctuations de fréquence des tronçons successifs.

Il n'est pas difficile de généraliser le résultat.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Blaquière, *J. Phys. Rad.*, t. 13, 1952, p. 527 et 636.

[2] A. Blaquière, *Ann. Radioélectr.*, t. 8, 1953, p. 36. *Thèse de Doctorat ès Sciences physiques*, Paris, 1953.

[3] A. Blanc-Lapierre et P. Lapostolle, *J. Phys. Rad.*, 8e série, t. 7, 1946, p. 154.

[4] R. M. Lerner, *The effect of noise on the frequency stability of a linear oscillator* (Worcester Polytechnic Institute).

[5] A. Blaquière, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 345; t. 234, 1952, p. 419, 710 et 1140; t. 235, 1952, p. 1201.

[6] S. O. Rice, *Bell Syst. Techn. J.*, juillet 1944.

[7] M. Soutif, *Thèse de Doctorat ès Sciences physiques*, Paris, 1951. Éditions de *La Revue scientifique*.

[8] R. E. Burgess, *Communication from the National Physical Laboratory*, 10 janvier 1951.

[9] A. van der Ziel, *Fluctuation Phenomena* (*Advances in electronics*, vol. 4, 1952, p. 109, Academic press inc., publishers New-York, N. Y.).

[10] M. Soutif, *J. Phys. Rad.*, 8e série, t. 10, 1949, p. 61 D.

[11] J. Loeb, *Ann. Télécommunications*, décembre 1951.

[12] A. Spaelti, *Der Einfluss des Thermischen Widerstandrauschens und des Schroteffektes auf die Störmodulation von Ozsillatoren* (*Bull. Assoc. Suisse Electr.*, vol. 39, 1948, p. 419).

[13] Rocard, *Dynamique générale des vibrations*, Masson, Paris, 1943.

Imp. GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
143 680
Dépôt légal, Imprimeur, 1953, n° 858.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER - VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
143680

Le Gérant : L. P. BOULANGER.

